MATH271 Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές

Σημειώσεις 2024-2025

Κωνσταντίνος Χούσος

Περίληψη

Εξετάζονται Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας σύμφωνα με τη Θεωρία Παιγνίων. Ασχολούμαστε με παιχνίδια χωρίς συνεργασία (σε εκτεταμένη μορφή, πεπερασμένα παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος (πινακοπαιχνίδια), πεπερασμένα παιχνίδια 2-παικτών μη 0-αθροίσματος, αναδρομικά παιχνίδια), και με παιχνίδια με συνεργασία.

1 2024-10-01 Tu

Παράδειγμα τριών παικτών A, B, C [1, παρ. 1.3, σ. 4].

$$a > b > c \implies P_A > P_B > P_C$$

Έστω η περίπτωση P_{AB}.

$$\begin{aligned} P_{AB} = {} & \underbrace{\Pr(P_A \mid A, a(1))}_{=1} \underbrace{\Pr(A, a(1))}_{=\frac{1}{2}a} + \underbrace{\Pr(P_A \mid A, a(0))}_{=P_{AB}} \underbrace{\Pr(A, a(0))}_{=\frac{1}{2}(1-a)} + \\ & \underbrace{\Pr(P_A \mid B, b(1))}_{=0} \underbrace{\Pr(B, b(1))}_{\frac{1}{2}b} + \underbrace{\Pr(P_A \mid B, b(0))}_{P_{AB}} \underbrace{\Pr(B, b(0))}_{\frac{1}{2}(1-b)} \end{aligned} \implies P_{AB} = \frac{a}{a+b}$$

Αντίστοιχα,

$$P_{AC} = \frac{a}{a+c}, \qquad P_{BC} = \frac{b}{b+c}$$

Έστω τώρα το σενάριο και με τους 3 παίκτες. Έστω ότι παίζει ο A. Η στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει είναι "με ποιον τον βολεύει να μείνει;", καθώς αν αστοχήσει το παιχνίδι ξαναρχίζει και όποιον κι αν στοχεύσει η πιθανότητα ευστοχίας παραμένει ίδια.

Άρα συγκρίνοντας τα P_{AC}, P_{AB}, συμπεραίνει ότι τον συμφέρει να στοχεύσει τον B. Αντίστοιχα ο B θα στοχεύσει τον A κι ο C τον A.

Λόγω της τυχαίας επιλογής του παίκτη, ορίζουμε

$$\begin{aligned}P_A &= \underbrace{\frac{1}{3}\cdot a\cdot P_{AC} + \frac{1}{3}\cdot(1-a)\cdot P_A}_{A} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot b\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(1-b)\cdot P_A}_{B} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot c\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(1-c)\cdot P_A}_{C}\\ &= \ldots\\ &= \frac{a^2}{(a+c)(a+b+c)}\end{aligned}$$

Αντίστοιχα βρίσκουμε

$$P_B = \frac{b}{a+b+c}, \qquad P_C = \frac{c(2a+c)}{(a+c)(a+b+c)}$$

Συγκρίνοντας τα P_A, P_B, P_C δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο A θα κερδίζει πάντα ως δυνατότερος παίκτης, όπως θα περιμέναμε.

Μια έμμεση υπόθεση που κάναμε είναι ότι οι παίκτες δεν μπορεί να συνεργαστούν μεταξύ τους.

Παραλλαγή: Οι A, B συμφωνούν να σημαδεύουν πάντα τον C. Σε αυτήν την παραλλαγή έχουμε διαφορετικές πιθανότητες P'_A, P'_B, P'_C.

2 2024-10-03 Th

Πρώτα δυο παραδείγματα του βιβλίου.

Σύνολο πληροφόρησης

3 2024-10-08 Tu

3.1 "Στοιχειώδες Πόκερ"

[1, παρ. 2.3.1, σ. 16].

Καλό φύλλο είναι οι *κούπες*. Άρα πιθανότητα $\frac{1}{4}$.

Ο πρώτος κόμβος είναι *κορυφή τύχης*.

Οι πληρωμές στις τερματικές κορυφές είναι ίσες με το *επιπλέον* ποσό/ποσό που κέρδισε. Π.χ. αν έχει κούπα και το δείξει κατευθείαν, ο I θα κερδίσει 1€, όχι 2€. Αντίστοιχα, στον "κάτω" τερματικό κόμβο, θα κερδίσει 3€.

Τα σύνολα πληροφόρησης αριθμούνται από ταμπέλες ως L_{ij}, όπου i είναι ο παίκτης και j ένας δείκτης που αυξάνει πρώτα κατά βάθος κι ύστερα από αριστερά προς τα δεξιά. Δηλαδή πρώτα κατά στήλη κι ύστερα κατά γραμμή.

3.2 Σύνολα ταμπελών

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε σύνολα ταμπελών

$$L_{11} = \{a, \delta\} \qquad L_{12} = \{a, \delta\} \qquad L_{21} = \{a.\pi\}$$

3.3 “Παιχνίδι Αναζήτησης”

[1, παρ. 2.3.2, σ. 18].

Στα σύνολα πληροφόρησης κοιτάμε το “παρελθόν”/τους κόμβους *πάνω* από τον τωρινό. **Όχι** το τι *θα* ξέρει ο I.

Ορισμός 3.1: Τέλεια Πληροφόρηση

Ένα παιχνίδι λέμε ότι έχει *τέλεια πληροφόρηση* όταν όλα τα σύνολα πληροφόρησης είναι μονοσύνολα.

Ορισμός 3.2: Πλήρης Πληροφόρηση

Ένα παιχνίδι λέμε ότι έχει *πλήρη πληροφόρηση* όταν κάθε παίκτης γνωρίζει όλους τους κανόνες του παιχνιδιού, όλοι ξέρουν ότι όλοι ξέρουν τους κανόνες κοκ.
Σε παιχνίδια που δεν έχουμε πλήρη πληροφόρηση, έχουμε *ελλειπή* πληροφόρηση.

Ορισμός 3.3: Τέλεια Ανάμνηση

Παιχνίδια στα οποία όλοι οι παίκτες θυμούνται όλη την πληροφόρηση την οποία είχαν στις προηγούμενες κινήσεις τους, καθώς και τις κινήσεις αυτές, ονομάζονται τέλειας ανάμνησης (perfect recall).

Δεν πρόκειται να δούμε παίγνια μη-τέλειας ανάμνησης.

3.4 Στρατηγική

[1, κεφ. 2.5].

Κάθε παίκτης έχει πολλαπλές πιθανές στρατηγικές κι επιλέγει μία. Άρα σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί τελικά μία στρατηγική. Αποτελεί ένα *πλήρες σχέδιο δράσης*.

Αποτελεί ένα σύνολο όπου σε κάθε σύνολο πληροφόρησης αντιστοιχείται η εκάστοτε επιλογή που θα κάνει ο παίκτης, ανεξάρτητα από το αν είναι πιθανό να περάσει από αυτά ή όχι.

Οι στρατηγικές συμβολίζονται ως s^i, όπου i ο αριθμός του παίκτη. Π.χ., η s^1 είναι η στρατηγική του παίκτη 1. Ορίζεται ως S^i το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i και ορίζεται ως

$$S^i = L_{i1} \times L_{i2} \times \cdots \times L_{ik_i}$$

και

$$|S^i| = \prod_{j=1}^{k_i} |L_{ij}|$$

3.5 “Το σκάκι των δύο κινήσεων”

[1, παρ. 2.5.1, σ. 24].

Στην αρχή ενός παιχνιδιού, τα λευκά πιόνια έχουν συνολικά 20 πιθανές κινήσεις. $2 \cdot 8 = 16$ κινήσεις για τα πιόνια και 4 πιθανές κινήσεις για τους ίππους.

4 2024-10-10 Th

- **Στρατηγική** και παραδείγματα
- Εισαγωγή στα πινακοπαιχνίδια

5 2024-10-15 Tu

5.1 Επανάληψη προηγούμενου μαθήματος

- Κανονική μορφή: Πίνακες πληρωμών

Για ένα παιχνίδι πεπερασμένων παικτών, αρκεί το σύνολο στρατηγικών των παικτών $\{s^1, s^2, \ldots, s^n\}$

- Στρατηγική κατάσταση $s = (s^1, \ldots, s^n), s^i \in S^i, i = 1, \ldots, n$ Δηλαδή, το σύνολο των στρατηγικών που θα ακολουθήσει ο κάθε παίκτης
- Συνάρτηση πληρωμής $h^i(s)$

Όταν $n = 2$, δηλαδή έχουμε 2 παίκτες, μπορούμε να τοποθετήσουμε τις πληρωμές του παίκτη I σε έναν πίνακα.

Στην γενική περίπτωση, χρειαζόμαστε 2 πίνακες A, B, όπου στον A οι γραμμές θα περιέχουν τις στρατηγικές του I και οι στήλες τις στρατηγικές του II. Στον B θα συμβαίνει το αντίστροφο. Ένα τέτοιο παιχνίδι λέγεται **διπινακοπαιχνίδι** [1, σσ. 31–32].

Μια ειδική περίπτωση είναι τα παιχνίδια *σταθερού αθροίσματος* c [1, σ. 31]. Εάν $c = 0$, τότε λέμε ότι έχουμε παιχνίδι *μηδενικού αθροίσματος*. Σε αυτήν την περίπτωση, αρκεί μόνο ένας πίνακας, καθώς κάθε στοιχείο a του A θα είναι $a = -b$ του B.

Ο κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του. Δηλαδή, ο I θέλει το μέγιστο σημείο του A ενώ ο II το ελάχιστο του A.

Ως σύμβαση, ορίζουμε τον παίκτη I ως τον παίκτη max και τον II ως τον παίκτη min.

- Πίνακας παραδείγματος "Morra" [1, παρ. 2.7.2, σ. 29].

5.2 "Το δίλημμα του κρατούμενου"

[1, παρ. 2.8.2, σ. 32].

Το συγκεκριμένο παιχνίδι **δεν είναι** σταθερού αθροίσματος. Άρα είναι *διπινακοπαιχνίδι*.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5.3 "Στοιχειώδες Πόκερ"

[1, παρ. 2.7.3, σ. 29].

Το συγκεκριμένο παιχνίδι **είναι** πινακοπαιχνίδι. Εδώ έχουμε την αναμενόμενη/μέση πληρωμή ως στοιχείο του πίνακα.

Για παράδειγμα, έστω $s^I = \{a, a\}$ και $s^{II} = \{a\}$. Τότε:

$$h^I(s) = \frac{1}{4}3 + \frac{3}{4}(-3) = -\frac{3}{2}$$

5.4 Απλοποιήσεις

[1, κεφ. 2.9].

Στρατηγικές όπου διαφέρουν μόνο σε συνιστώσες που αντιστοιχούν σε σύνολα πληροφόρησης που δεν θα "πάνε" ποτέ, έχουν ίδιες γραμμές/στήλες στον πίνακα.

Άρα, τέτοιες στρατηγικές μπορούμε να τις απλοποιήσουμε στην ίδια στρατηγική, π.χ. 1γ_, όπου η 3η συνιστώσα αντιστοιχεί σε σύνολο πληροφόρησης που δεν μας αφορά.

5.5 Άσκηση 8: "Παιχνίδι Chicken"

$S^I = \{c, !c\}, S^{II} = \{c, !c\}$. Οι γραμμές ορίζονται ως $c, !c$ κι αντίστοιχα οι στήλες.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

Πληροφορία

Στο συγκεκριμένο παιχνίδι, οι πληρωμές βγαίνουν κατευθείαν καθώς δεν υπάρχουν κινήσεις τύχης.

6 2024-10-17 Th

6.1 Δυναμικός προγραμματισμός

[1, εν. 3.1]

Αναδρομή προς τα πίσω.

Αυτή η τακτική βασίζεται στην *θεωρία ωφέλειας* του Von Neumann, καθώς θεωρούμε ότι ο κάθε παίκτης θα μεγιστοποιήσει ό,τι τον συμφέρει. Δηλαδή, ο I θα επιλέγει με βάση την μεγιστοποίηση της πληρωμής ενώ ο II με βάση την ελαχιστοποίησή της.

Για να δουλέψει η επίλυση μέσω Δυναμικού Προγραμματισμού, απαιτείται το παιχνίδι να είναι **τέλειας πληροφόρησης**.

~~Άρα, σε παιχνίδια χωρίς κόμβους τύχης, μπορούμε να απλοποιήσουμε την εκτεταμένη μορφή ενός παιχνιδιού σε μία μόνο απόφαση, δηλαδή ένα δέντρο ενός κόμβου με δύο παιδιά.~~

Σε κόμβους με τυχαιότητα, τους αντικαθιστούμε με την μέση τιμή των πληρωμών.

Κρίσιμη είναι η υπόθεση ότι όλοι οι παίκτες είναι *λογικοί/ορθολογικοί*.

6.1.1 Γενικοί κανόνες

1. Κόμβους τύχης του αντικαθιστούμε με τη μέση τιμή των πληρωμών
2. Κόμβους απόφασης του I τους αντικαθιστούμε με τη μέγιστη πληρωμή
3. Κόμβους απόφασης του II τους αντικαθιστούμε με την ελάχιστη πληρωμή

6.1.2 "Morra"

Στο συγκεκριμένο παιχνίδι, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε δυναμικό προγραμματισμό, γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε την απόφαση του παίκτη II.

6.1.3 Παιχνίδι μη 0-αθροίσματος (παράδειγμα 3.1.1)

[1, σ. 44]

Σημείωση

- Δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο II θέλει είτε να ελαχιστοποιήσει είτε να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του I όταν η δική του θα παραμείνει ίδια.
- Στην παραπάνω περίπτωση, **δεν** μπορούμε να αντικαταστήσουμε με τη μέση τιμή.

Οι παραπάνω οπτικές είναι στην ίδια κατηγορία, ότι γενικά κάνουμε υποθέσεις για την συμπεριφορά των υπολοίπων παικτών/πρακτόρων.

Στο συγκεκριμένο παιχνίδι, ανάλογα με την απόφαση του II στο 1ο του σύνολο πληροφόρησης — η οποία για τον II δεν κάνει διαφορά —, αλλάζει η βέλτιστη στρατηγική του I.

- s_0^i: βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική κατάσταση s [1, ορ. 3.1.1, σ. 44].
- $BR(s^{-i})$: Σύνολο βέλτιστων απαντήσεων (best response set)

7 2024-10-22 Tu

Ορισμός 7.1: Σύνολο βέλτιστων απαντήσεων

$BR^i(s)$: Σύνολο βέλτιστων απαντήσεων του i στη στρατηγική κατάσταση $s = \{s^i, s^{-i}\}$. Δηλαδή, οι στρατηγικές του i που μεγιστοποιούν την πληρωμή του όταν οι υπόλοιποι παίκτες παίζουν με στρατηγικές s^{-i}.

$$\{u \in S^i \mid h^i(u, s^{-i}) \geq h^i(u', s^{-i}) \forall s' \in S^i\} =$$
$$\{u \in S^i \mid h^i(u, s^{-i}) = \max_{u' \in S^i} h^i(u', s^{-i})\}$$

Παράδειγμα 7.1: Morra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s^1 = \{0, 1\}, s^2 = \{0, 1\}, S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Έστω $s = (0, 1)$. Εφόσον $s^{-1} = 1$, τότε $BR^1(s) = \{1\}$, ενώ $s^{-2} = 0$ άρα $BR^2(s) = \{1\}$.

Σημείωση

Σε διπινακοπαιχνίδια, οι επιλογές του 1ου παίκτη βρίσκονται στις γραμμές και του 2ου στις στήλες, **ανεξάρτητα** του πίνακα.

7.1 Το Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας (ΣΣΙ) ή Σημείο Nash

[1, εν. 3.2].

Μπορεί να υπάρχουν κι άλλες στρατηγικές που μεγιστοποιούν την πληρωμή, αλλά αυτό δεν επηρεάζει το εκάστοτε σημείο ισορροπίας.

Δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει τέτοιο σημείο σε ένα παιχνίδι.

Παράδειγμα 7.2: Morra (συνέχεια)

- $s = (0, 1)$: **μη** ΣΣΙ. Εάν ο 1ος γνώριζε ότι $s^2 = 1$, θα άλλαζε τη στρατηγική του σε 1. Άρα $s^1 \notin BR^1(s)$.
- $s = (0, 0)$: **μη** ΣΣΙ. $s^2 \notin BR^2(s)$.
- $s = (1, 0)$: **μη** ΣΣΙ. $s^1 \notin BR^1(s)$.
- $s = (1, 1)$: **μη** ΣΣΙ. $s^2 \notin BR^2(s)$.

Άρα στο συγκεκριμένο παιχνίδι **δεν υπάρχει** ΣΣΙ.

Παράδειγμα 7.3

[1, παράδειγμα 3.3.1, σ. 47]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \{LL, RL, LR, RR\}$$

- $s = (L, L)$: ΣΣΙ.
- $s = (L, R)$: **μη** ΣΣΙ.
- $s = (R, L)$: **μη** ΣΣΙ.
- $s = (R, R)$: ΣΣΙ.

Στο παραπάνω παράδειγμα, τυχόν λογικοί παίκτες θα μπορούσαν να βρουν από μόνοι τους τα σημεία ισορροπίας και να επιλέξουν τις αντίστοιχες στρατηγικές. Δεν σημαίνει όμως ότι θα είχαμε "καλό αποτέλεσμα", καθώς θα μπορούσαν να επιλέξουν διαφορετικά μεταξύ τους ΣΣΙ.

Ορισμός 7.2: Συνολική/κοινωνική ωφέλεια (social benefit)

Το άθροισμα των πληρωμών των παικτών.

$$\sum_{i=1}^{n} h^i(s)$$

Παράδειγμα 7.4

[1, παράδειγμα 3.3.2, σ. 48]

$$A = \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (L, L): ΣΣΙ. Συνολική ωφέλεια $= 0 = \max \sum$.
- (R, R): ΣΣΙ. Συνολική ωφέλεια $= 0 = \max \sum$.
- (C, C): ΣΣΙ, *αλλά* συνολική ωφέλεια $= -2 \neq \max \sum$. Γενικά, $(\_, C)$ και $(C, \_)$ ΣΣΙ.

Πληροφορία

Αν ένα ΣΣΙ έχει συνολική ωφέλεια $\sum_{i=1}^{n} h^i(s) = \max_{s'} \sum_{i=1}^{n} h^i(s')$, τότε το ΣΣΙ λέγεται *κοινωνικά βέλτιστο.*

Παράδειγμα 7.5

Το Δίλημμα Του Κρατούμενου [1, παράδειγμα 3.3.3, σ. 49]

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (o, o): ΣΣΙ.
- Κανένα από τα υπόλοιπα σύνολα στρατηγικών δεν είναι ΣΣΙ.

Παρατηρούμε ότι στο μοναδικό ΣΣΙ η συνολική ωφέλεια = -16 είναι η χειρότερη δυνατή.

Σε πινακοπαιχνίδια, για να είναι ένα σημείο ΣΣΙ, πρέπει να είναι το μέγιστο της στήλης και το ελάχιστο της γραμμής.

8 2024-10-24 Th

8.1 Υποπαιχνίδια

[1, ορ. 3.4.1, σ. 50].

8.2 Μεικτή στρατηγική

[1, εν. 3.5.2].

- *Καθαρή στρατηγική*: Όταν ο παίκτης υπακούει *μία* στρατηγική από το σύνολο στρατηγικών καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού [1, ορ. 3.5.3].

Στην ουσία, η στρατηγική που θα ακολουθήσει ο παίκτης επιλέγεται μέσω ενός πειράματος τύχης.

Η επιλογή γίνεται **μία φορά** στην **αρχή** του παιχνιδιού.

Παρένθεση για αναφορά στην *εξελικτική θεωρία παιγνίων.*

Παράδειγμα [1, σ. 60].

8.3 Η Μεικτή Επέκταση ενός Παιχνιδιού σε Κανονική Μορφή

[1, παρ. 3.5.3].

Στρατηγικές παίκτη 1: $s^1 = \{1, 2, \dots, m\}$. Στρατηγικές παίκτη 2: $s^1 = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Έστω ο I επιλέγει μεικτή στρατηγική $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^m$ και ο II επιλέγει μεικτή στρατηγική $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{P}^n$, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον.

Μια στρατηγική κατάσταση σε καθαρές στρατηγικές $s \subset S^1 \times S^2$, είναι της μορφής $s = (i, j)$ με $i \in S^1, j \in S^2$.

Μια στρατηγική κατάσταση σε μεικτές στρατηγικές είναι της μορφής $\tilde{s} = (x, y)$ με $x \in \mathbb{P}^m, y \in \mathbb{P}^n$. Άρα $\tilde{S} \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$.

Πληρωμές: $h(s), s \in S$. $h(i, j) = (a_{ij}, b_{ij})$.

$$h^1(i, j) = a_{ij} \qquad h^2(i, j) = b_{ij}$$

$\tilde{h}_1(x, y) =$ πληρωμή του I στη στρατηγική κατάσταση (x, y).

Έστω R_1 η στρατηγική που θα προκύψει για τον I. Αντίστοιχα η R_2. Εφόσον είναι ανεξάρτητες, θα έχουμε

$$\Pr(R_1 = i, R_2 = j) = x_i \cdot y_j \implies h^1 = a_{ij}$$

Άρα κι η πληρωμή ενός παίκτη είναι μία *τυχαία μεταβλητή*. Οπότε, η *μέση πληρωμή* του I ορίζεται ως:

$$\tilde{h}_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot a_{ij} = x^T A y$$

Μηλολιδάκης [1], ορισμός 3.5.4, σ. 62.

9 2024-10-29 Tu

9.1 Άσκηση 3.14

Καταρχάς, έχουμε $S^I = \{0, 1\} = S^{II} \implies S = S^I \times S^{II}$.

- $s = (0, 0) : \{t \geq 2, 2 \geq 0\} \implies$ Αν $t \geq 2$, τότε είναι ΣΣΙ.
- $s = (0, 1)$: Όχι ΣΣΙ, καθώς ο II θέλει να πάει στο 2.
- $s = (1, 0) : \{2 \geq t, 0 \geq 2\} \implies$ Αδύνατο, άρα όχι ΣΣΙ.
- $s = (1, 1)$: Όχι ΣΣΙ.

Άρα, υπάρχει ΣΣΙ $\iff t \geq 2$.

9.2 Άσκηση 3.4

Τα πολλαπλάσια του 3 χάνουν, τα υπόλοιπα κερδίζουν.

9.3 Άσκηση 3.16[1]

1. Το K_i εκφράζει το ποιους γείτονες θα καταγγείλει ο παίκτης i.
2. Για τον κάθε παίκτη i έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
3. $i \in \Delta(s) \cap K(s)$: Ο παίκτης i δεν παρανόμησε *και* δεν καταγγέλθηκε. Η πληρωμή του θα είναι b, καθώς δεν έχει κίνητρο να "παίξει" $x_i = \pi$.
4. $i \in \Delta'(s) \cap K(s)$: $h^i = c$.
5. $i \in \Delta(s) \cap K'(s)$: $h^i = b$.
6. $i \in \Delta'(s) \cap K'(s)$: $h^i = a$.

[1] Δεν υπάρχει στο PDF, υπάρχει όμως στο βιβλίο.

Αν $\Delta'(s) \cap K(s) \neq \emptyset$, η s δεν είναι ΣΣΙ. Παρομοίως, αν $\Delta(s) \cap K'(s) \neq \emptyset$.

Άρα η s είναι ΣΣΙ αν και μόνο αν:

$$\left.\begin{aligned}\Delta'(s) \cap K(s) = \emptyset &\implies K(s) \subseteq \Delta(s)\\ \Delta(s) \cap K'(s) = \emptyset &\implies \Delta(s) \subseteq K(s)\end{aligned}\right\} \implies \Delta(s) = K(s)$$

9.4 Παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος

Μηλολιδάκης [1], κεφ. 4.

- Λήμμα 4.1.1 (*σαγματικό σημείο*), 4.1.2 (πολλαπλά ΣΣΙ, ίδια μοναδική πληρωμή) κι ορισμός 4.1.1 (επίπεδο ασφάλειας) [1, σσ. 69–70].

Ορισμός 9.1: Σαγματικό σημείο

Το (i_0, j_0) είναι ΣΣΙ (σε καθαρές στρατηγικές) σε ένα π.π. A αν και μόνο αν το $a_{i_0 j_0}$ είναι *ελάχιστο γραμμής* και *μέγιστο στήλης* του πίνακα πληρωμών A.

Ορισμός 9.2: Επίπεδο ασφάλειας $\mathbf{u}^i$

$$u^i := \max_{s^i} \min_{s^{-i}} h^i(s^i, s^{-i})$$

10 2024-10-31 Th

Σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος, οι ακόλουθοι όροι είναι ισοδύναμοι: Επίπεδο ασφάλειας παίκτη $I \equiv$ *κάτω τιμή* του παιχνιδιού σε καθαρές στρατηγικές $\equiv \underline{u} \equiv u^1$.

Αντίστοιχα για τον παίκτη II έχουμε *άνω τιμή* $\equiv \overline{u} \equiv u^2$.

Λήμμα 10.1

Για κάθε π.π. A ισχύει ότι $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Εάν έχουμε $\underline{u} = \overline{u}$, τότε αυτή η τιμή λέγεται *τιμή του π.π. σε καθαρές στρατηγικές* και συμβολίζεται με u.

> Προσέξτε πόσο εύκολα παίρνουμε τις $\underline{u}$ και $\overline{u}$: Κατά μήκος κάθε γραμμής του A παίρνουμε το ελάχιστο και το σημειώνουμε μετά τη n-στη στήλη. Ομοίως, κατά μήκος κάθε στήλης του A παίρνουμε το μέγιστο και το σημειώνουμε μετά την m-στη γραμμή. Τέλος καταγράφουμε το μέγιστο από τα ελάχιστα στην άκρη δεξιά και το ελάχιστο από τα μέγιστα κάτω-κάτω.

- Πρόταση 4.1.1. [1, σ. 73]. $\underline{u} = \overline{u} \iff$ Υπάρχει ΣΣΙ(i_0, j_0) σε καθαρές στρατηγικές και ισχύει ότι $u = a_{i_0 j_0}$.

Πινακοπαιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές:

1. Τα επίπεδα ασφάλειας των δύο παικτών σε καθαρές στρατηγικές συμπίπτουν.
2. Η πληρωμή σε κάθε ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές είναι σταθερή.

Εάν ο πίνακας έχει σαγματικό σημείο $a_{i_0 j_0}$, θα θεωρούμε αυτό ως τιμή του παιχνιδιού (λύση) και τα i_0, j_0 ως τις *βέλτιστες* στρατηγικές του εκάστοτε παίκτη.

10.1 Επίπεδο ασφάλειας σε μεικτές στρατηγικές

Ορισμός 4.1.3 [1, σ. 74].

$$\underline{v} := \max_{x \in \mathbb{P}^m} \min_{y \in \mathbb{P}^n} x^T A y \qquad \bar{v} := \min_{y \in \mathbb{P}^n} \max_{x \in \mathbb{P}^m} x^T A y$$

11 2024-11-05 Tu

$\underline{u}, \bar{u}$: καθαρές στρατηγικές. $\underline{v}, \bar{v}$: μεικτές στρατηγικές.

- Πρόταση 4.1.2, σ. 75
- Λήμμα 4.1.6, σ. 76
- Πρόταση 4.1.3, σ. 77
- Ορισμός 4.2.1, σ. 79
- Θεώρημα Minimax, εν. 4.2, θ. 4.2.1, σ. 80
- Πόρισμα 4.2.1, σ. 83

11.1 Απλοποιήσεις

Μηλολιδάκης [1], εν. 4.3, σ. 84.

Για γραμμές με ίδιες τιμές κρατάμε μόνο τη μία. Μια γραμμή **κυριαρχεί** μια άλλη γραμμή όταν της είναι μεγαλύτερη κατά στοιχείο. Αντίστοιχα, κρατάμε μόνο τις γραμμές που δεν κυριαρχούνται από κάποια άλλη — και δεν δίνεται βάρος πιθανότητας στις άλλες, σε περίπτωση μεικτής στρατηγικής.

Αντίστοιχα για στήλες όσον αφορά τον παίκτη II, όμως πλέον θέλουμε τα στοιχεία της στήλης που κυριαρχεί να είναι *μικρότερα*.

- Ορισμός 4.3.1α, σ. 85
- Ορισμός 4.3.1β, σ. 85 Επέκταση για κυριαρχεία μέσω μεικτής στρατηγικής (βλ. βιβλίο).

12 2024-11-07 Th

12.1 Πινακοπαιχνίδια με δύο γραμμές είτε δύο στήλες

Μηλολιδάκης [1], εν. 4.4.

Μεικτές στρατηγικές x^0/y^0 κάθε μία τέτοια ώστε η αναμενόμενη πληρωμή k/k' του παίκτη να είναι ανεξάρτητη από την επιλογή στήλης/γραμμής του άλλου. Το x^0/y^0 λέγεται *εξισωτική* στρατηγική του I/II.

$$k = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Προκύπτει ότι $k = k' = x^0 A y^0$.

$$x^T A y^0 = x^{0^T} A y^0 = x^{0^T} A y \quad \forall x \in \mathbb{P}^2, \quad \forall y \in \mathbb{P}^2$$

Επίσης, προκύπτει ότι η στρατηγική κατάσταση (x_0, y_0) είναι ΣΣΙ και $k = v_A = x^0 A y^0$.

Συμβουλή

Πάντα ελέγχουμε πρώτα αν υπάρχει σαγματικό σημείο.

Ορισμός 12.1

Παιχνίδια που η *τιμή* τους είναι 0 λέγονται **τίμια**.

Παράδειγμα 12.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Σαγματικό σημείο το $a_{11} = 3$.
- $I\,:\,3x + 2(1-x) = 5x + 4(1-x) \implies 2 + x = 4 + x$. **ΆΤΟΠΟ**
- $II\,:\,3y + 5(1-y) = 2y + 4(1-y) \implies 5 - 2y = 4 - 2y$. **ΆΤΟΠΟ**

12.1.1 Παιχνίδια $2 \times n$

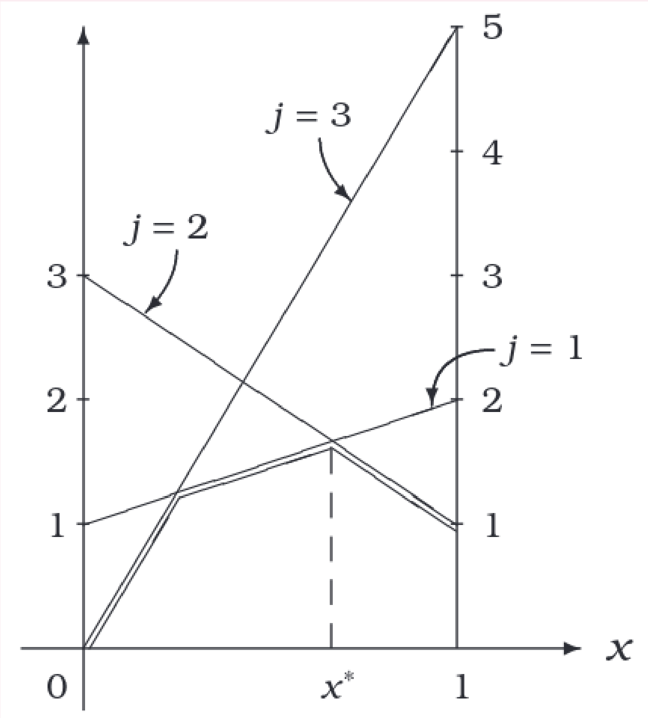
Μηλολιδάκης [1], σ. 90.

Παράδειγμα 12.2: Παραλλαγή παραδείγματος 4.4.2, σ. 91

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{u} = 2, \underline{u} = 1$. *Δεν* υπάρχει ΣΣΙ σε κάθε στρατηγική.

$$\begin{aligned}
\underline{v} &= \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \\
&= \max_{\mathbf{x}} \underbrace{\min(\mathbf{x}^T A_{.1}, \mathbf{x}^T A_{.2}, \mathbf{x}^T A_{.3})}_{f(x)} \\
&= \max_{x \in [0,1]} (2x + (1-x), x + 3(1-x), 5x) \\
&= \max_{x \in [0,1]} (x + 1, -2x + 3, 5x)
\end{aligned}$$



Το x^* στο οποίο η $f(x)$ μεγιστοποιείται ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα για $j = 1, 2$. Δηλαδή το x^* βρίσκεται λύνοντας

$$a_{11}x^* + a_{21}(1 - x^*) = a_{12}x^* + a_{22}(1 - x^*) \implies$$
$$2x + 1 - x = x + 3(1 - x) \implies x = 2(1 - x) \implies x^* = \frac{2}{3}$$

Άρα η βέλτιστη στρατηγική είναι η $x^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ και $v_A = \frac{5}{3}$. Οι εξισωτικές στρατηγικές που μένουν είναι

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε τον υποπίνακα για να βρούμε y^0 και προκύπτει ότι $y^* = \frac{2}{3}$, άρα $y^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

13 2024-11-19 Tu

13.1 Βήματα επίλυσης π.π.

Μηλολιδάκης [1], σ. 98.

1. Διαδοχικές απλοποιήσεις (γραμμές, στήλες)
2. Σαγματικό σημείο ώστε να βρούμε $\underline{u} = \overline{u} = v_A$
3. Εάν $\underline{u} < \overline{u}$, το ΣΣΙ βρίσκεται σε μεικτές στρατηγικές. Ψάχνουμε εξισωτικές στρατηγικές αν γίνονται

13.2 Παιχνίδια με στάδια

Μηλολιδάκης [1], εν. 5.2.

> Μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα υποπαιχνίδι στο δέντρο με τη τιμή του υποπαιχνιδιού.

13.2.1 Συμπεριφορική στρατηγική

Ορισμός 13.1: Συμπεριφορική στρατηγική

Για παίκτη με k σύνολα πληροφόρησης, *συμπεριφορική στρατηγική* ονομάζεται μία συλλογή από k κατανομές πιθανότητας, μία για το κάθε σύνολο.
Στην ουσία, κάθε κατανομή είναι μεικτή στρατηγική για το υποπαιχνίδι-υποδέντρο του αντίστοιχου συνόλου πληροφόρησης.

Αν και παρουσιάζονται ως πλειάδες κι αυτές, μια συμπεριφορική στρατηγική αφορά παραπάνω από ένα σύνολα πληροφόρησης. Επίσης, σε κάθε στοιχείο κρύβονται δύο πιθανότητες, γιατί το $x_i \in [0, 1]$ εκφράζει την πιθανότητα της μίας από δύο επιλογές. Άρα έχουμε και την πιθανότητα για την άλλη επιλογή, ίση με $1 - x_i$.

Άρα από μία συμπεριφορική στρατηγική μπορούμε να εξάγουμε μία μεικτή στρατηγική (βλ. παράδειγμα 5.2.1, σ. 141).

Αν το παιχνίδι είναι τέλειας ανάμνησης, τότε κάθε συμπεριφορική στρατηγική ισοδυναμεί με μία μεικτή στρατηγική και το αντίστροφο.

Αν το παιχνίδι **δεν** είναι τέλειας ανάμνησης, δεν ισχύει απαραίτητα το παραπάνω.

13.2.2 Πεπερασμένα αναδρομικά παιχνίδια

Ορισμός 13.2: Αναδρομικό παιχνίδι

Ένα πεπερασμένο παιχνίδι n-παικτών Γ καλείται *αναδρομικό* όταν περιέχει υποπαιχνίδια ως συνιστώσες.

- Παρατήρηση σ. 144 για επίλυση.

13.2.2.1 Παιχνίδια με παραμετροποίηση

Μηλολιδάκης [1], σ. 147.

a.k.a παιχνίδια πεπερασμένων πόρων, παιχνίδια εξάντλησης.

- **Παράμετρος**: Ο αριθμός σταδίων μέχρι τη λήξη του παιχνιδιού ή/και κάποιος πόρος των παικτών που χρησιμοποιούν σε κάθε βήμα.
- **Συνοριακή συνθήκη** v_0: Προκύπτει από την επίλυση των τελευταίων υποπαιχνιδιών.
- Παράδειγμα 5.2.4 (Ηχηρή Μονομαχία), σ. 147.

14 2024-11-21 Th

- Παράδειγμα 5.2.5 (Παιχνίδι Επιθεώρησης), σ. 149.

Συμβουλή

Όταν έχουμε άσκηση με “n μέρες” ή “n-κάτι” κτλ. λύνε με αναδρομή.

Παράδειγμα 14.1

> Έχουμε έναν μετρητή που ξεκινάει από το n. Έχουμε δύο παίκτες που επιλέγουν ταυτόχρονα 0 ή 1.
> - $(0,0) \implies I$ κερδίζει 2.
> - $(0,1) \implies I$ κερδίζει 1.
> - $(1,0) \implies I$ κερδίζει 0.
> - $(1,1) \implies$ μετρητής $n-1$, επαναλαμβάνεται το ίδιο. Αν ποτέ $n=0$, ο I κερδίζει $a>1$.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \Gamma_{n-1} \end{pmatrix}, \quad v_n = \mathrm{val}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & v_{n-1} \end{pmatrix}, \quad v_0 = a.$$

14.0.0.0.1 Για $n = 1$

$$v_1 = \mathrm{val}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Έχουμε $\underline{u} = 1, \overline{u} = \min\{2, a\} > 1$. Άρα $\underline{u} \neq \overline{u}$. Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

14.0.0.1 Εξισωτικές στρατηγικές

- I: $2x = x + a(1-x) \implies x = \frac{a}{1+a}$.

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{1+a} \\ \frac{1}{1+a} \end{pmatrix}$$

- II: $2y + (1-y) = a(1-y) \implies y = \frac{a-1}{a+1}$.

$$y_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a+1} \\ \frac{2}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 2x = \frac{2a}{1+a} > 1$$

14.0.0.1.1 Για $n = 2$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = 1, \overline{u} = \min\{2, \max(1, v_1)\}$$

14.0.0.2 Μεικτές

Άμεσα βγαίνει ότι

$$x_2^0 = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{1+v_1} \\ \frac{1}{1+v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{1+3a} \\ \frac{a+1}{1+3a} \end{pmatrix}$$

$$y_2^0 = \begin{pmatrix} \frac{v_1-1}{v_1+1} \\ \frac{2}{v_1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-1}{3a+1} \\ \frac{2a+2}{3a+1} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{2v_1}{1+v_1} = \frac{\frac{4a}{1+a}}{1+\frac{2a}{1+a}} = \frac{4a}{1+3a}$$

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1+v_n} = \mathrm{val}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & v_n \end{pmatrix}$$

14.0.0.3 Γενική μορφή του v_n Αποδ. $v_n > 1 \forall n$. Από τα παραπάνω βγαίνει ότι

$$v_n = \frac{2^n a}{1+(2^n-1)a}$$

☐ Επαγωγική υπόθεση

15 2024-11-26 Tu

15.1 Γραφική επίλυση δ.π.π. 2×2

Μηλολιδάκης [1], εν. 6.1. Ειδίκευση της μεθόδου Lemke-Howson [1, εν. 6.2].

- Παράδειγμα 6.1.1 (Η μάχη των δύο φύλων), σ. 201.

Παράδειγμα 15.1: Παράδειγμα 6.1.2 (Το δίλημμα του κρατουμένου), σ. 203.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h^I(x,y) = \cdots = (y+1)x - (9y+1)$$
$$h^{II}(x,y) = \cdots = (x+1)y - (9x+1)$$

- $BR^I(y)$: $\forall y \in [0,1], 1+y>0 \implies h^I$ γνησίως αύξουσα ως προς $x \implies BR^I(y) = \{1\} \forall y$.
- $BR^{II}(x)$: $\forall x \in [0,1], 1+x>0 \implies h^{II}$ γνησίως αύξουσα ως προς $y \implies BR^{II}(x) = \{1\} \forall x$.

Μοναδικό ΣΣΙ: $x^0 = 1, y^0 = 1 \iff$ (ομολογώ, ομολογώ) σε κάθε στρατηγική και $h^I = -8, h^{II} = -8$.

Παράδειγμα 15.2: Θέμα εξετάσεων

> Αν ανοίξουν κι οι δύο επιχειρήσεις φυσικό κατάστημα, τότε κάθε μία έχει απώλεια 10. Αν ανοίξει μόνο μία, τότε έχει κέρδος 2, ενώ η άλλη έχει απώλεια 1. Αν δεν ανοίξει καμία, τότε κάθε μία έχει ωφέλεια t.
> 1. Να εκφραστεί σε κανονική μορφή.
> 2. Να βρεθούν τα ΣΣΙ για $t = 1$.
> 3. Για ποιες τιμές του $t \exists$ ΣΣΙ σε κάθε στρατηγική;

15.1.0.0.1 Ερώτημα 1

$$S^I = \{κ,η\} = S^{II},$$

όπου "κ": φυσικό κατάστημα και "η": ηλεκτρονικές παραγγελίες.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -1 & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

15.1.0.0.2 Ερώτημα 2

$$\begin{aligned} h^I(x,y) &= -10xy + 2x(1-y) - 1(1-x)y + 1(1-x)(1-y) \\ &= \dots \\ &= (1-10y)x + 1 - 2y \\ h^{II}(x,y) &= -10xy - 1(1-y)x + 2(1-x)y + 1(1-x)(1-y) \\ &= \dots \\ &= (1-10x)y - 2x + 1 \end{aligned}$$

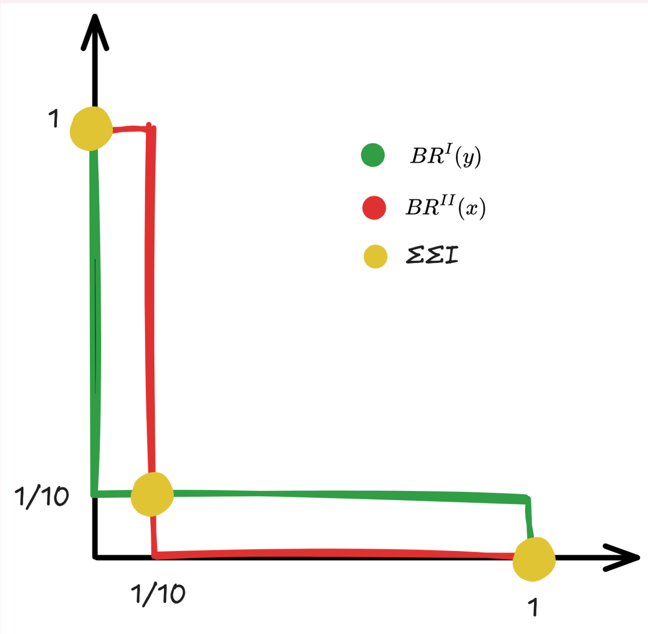
$$ BR^{I}(y)=

$\begin{cases} \{1\}, & y < \frac{1}{10} \\ [0.1], & y = \frac{1}{10} \\ \{0\}, & y > \frac{1}{10} \end{cases}$

BR^{II}(x)=

$\begin{cases} \{1\}, & x < \frac{1}{10} \\ [0.1], & x = \frac{1}{10} \\ \{0\}, & x > \frac{1}{10} \end{cases}$

$$



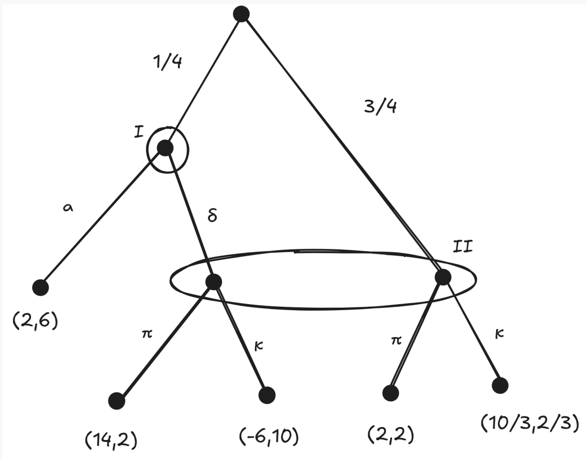
- $x^0 = 0, y^0 = 1 \implies$ (η,κ) (καθαρή στρατηγική)

- $x^0 = \frac{1}{10}, y^0 = \frac{1}{10}$
- $x^0 = 1, y^0 = 0 \implies$ (κ,η) (καθαρή στρατηγική)

15.1.0.0.3 Ερώτημα 3

- (κ,η) ΣΣΙ αν $t \leq 2$
- (η,κ) ΣΣΙ αν $t \leq 2$
- (η,η) ΣΣΙ αν $t > 2$

Παράδειγμα 15.3: Θέμα εξετάσεων



Να βρεθούν όλα τα ΣΣΙ κι οι ωφέλειες των παικτών στο καθένα.

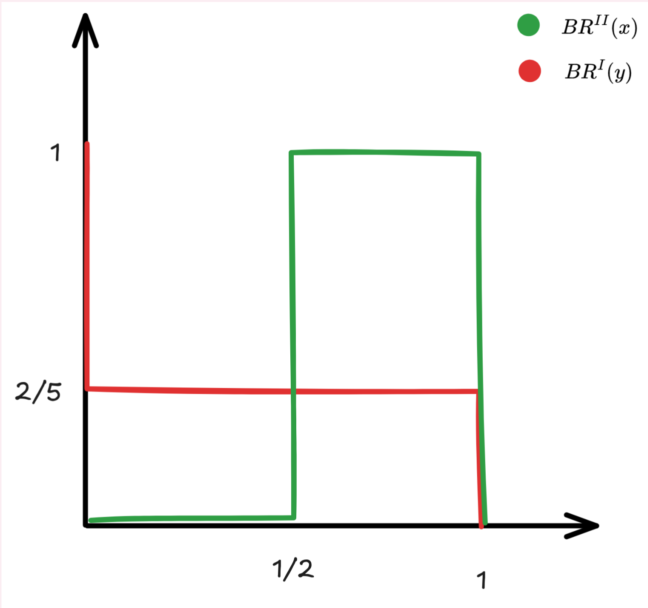
Πρόκειται για διπινακοπαιχνίδι με $S^I = \{\alpha, \delta\}, S^{II} = \{\pi, \kappa\}$.

$$A = \begin{array}{c} \alpha \\ \delta \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \pi & \kappa \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a, π): $h^I = \frac{1}{4}2 + \frac{3}{4}2 = 2$. $h^{II} = \frac{1}{4}6 + \frac{3}{4}2 = 3$.
- (a, κ): $h^I = \frac{1}{4}2 + \frac{3}{4}\frac{10}{3} = 3$. $h^{II} = \frac{1}{4}6 + \frac{3}{4}\frac{2}{3} = 2$.
- (δ, π): $h^I = \cdots = 5. h^{II} = 2$.
- (δ, κ): $h^I = 1. h^{II} = 3$.

$$h^I(x, y) = x^T A y = (-5y + 2)x + 4y + 1$$
$$h^{II}(x, y) = x^T B y = (2x - 1)y - x + 3$$

$$BR^I(y) = \begin{cases} \{1\}, & y < \frac{2}{5} \\ [0, 1], & y = \frac{2}{5} \\ \{0\}, & y > \frac{2}{5} \end{cases} \qquad BR^{II}(x) = \begin{cases} \{0\}, & y < \frac{1}{2} \\ [0, 1], & y = \frac{1}{2} \\ \{1\}, & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$



ΣΣΙ $x^0 = \frac{1}{2}, y^0 = \frac{2}{5}$. $h^I = \frac{13}{5}, h^{II} = \frac{5}{2}$.

16 2024-11-28 Th

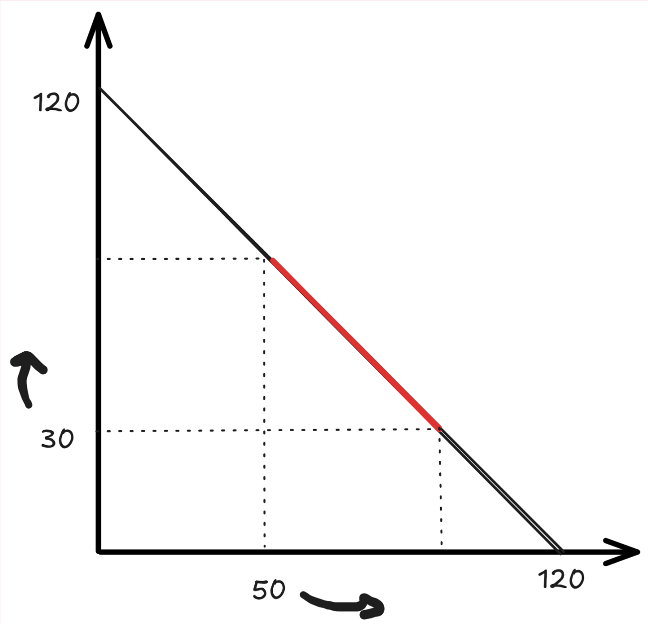
16.1 Παιχνίδια σε συμμαχική μορφή

Μηλολιδάκης [1], κεφ. 10, σ. 385.

- **Υπόθεση**: Όλοι οι παίκτες επιτρέπεται να σχηματίσουν συμμαχίες.

Παράδειγμα 16.1

Δύο ανταγωνιστικοί παίκτες μπορεί να έχουν σε ΣΣΙ $h^I = 50$ και $h^{II} = 30$ αλλά εάν συμμαχήσουν να έχουν $\underbrace{h^I}_{=20} + \underbrace{h^{II}}_{=100} = 120$.
Θέτουμε x_1, x_2 την αμοιβή του I και του II αντίστοιχα στη συμμαχία.
Για να δεχτούν να συμμαχήσουν πρέπει $x_1 \geq 50, x_2 \geq 30$. Έστω $x_1 + x_2 = 120$.



Η τομή συμφερόντων (κόκκινη γραμμή) όπου $x_1 \geq 50 \wedge x_2 \geq 30$ λέγεται *πυρήνας*.

- Υπόθεση μεταφερόμενης ωφέλειας, σ. 386.
- Χαρακτηριστική συνάρτηση, ορισμός 10.1.1, σ. 387.

> Η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνει μία τιμή σε κάθε υποσύνολο παικτών. Τα υποσύνολα λέγονται συμμαχίες. Τη τιμή θα την αντιλαμβανόμαστε ως την "αξία" μιας συμμαχίας.

- Επίπεδο ασφαλείας μίας συμμαχίας, ορισμός 10.1.3, σ. 389.

Θεώρημα 16.1: Θεώρημα 10.1.1, σ. 389

Εάν v η συνάρτηση του επιπέδου ασφάλειας των συμμαχιών στο παιχνίδι Γ, η v είναι *χαρακτηριστική συνάρτηση*.

17 2024-12-03 Tu

17.1 Παραδείγματα παιγνίων με συνεργασία

Παράδειγμα 17.1: Κανόνας ομοφωνίας

> n παίκτες. Ποσό a θα μοιραστεί στους παίκτες μόνο αν όλοι συμφωνήσουν.

$S \subseteq N, v(S), v(N) = a$. Αν $S \subset N, S \neq N$, τότε $v(S) = 0$.

Παράδειγμα 17.2: Αυτός που διαφέρει χάνει

> Κάθε παίκτης από τους N σηκώνει Δ ή A χέρι. Αν ο παίκτης i μείνει μόνος (όλοι οι άλλοι διαφορετικό χέρι), δεν κερδίζει τίποτα. Διαφορετικά ο παίκτης i κερδίζει i μονάδες ωφέλειας.

Αν $|S| > 1$, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, k > 1$ τότε $v(S) = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$.
Π.χ. $v(\{1, 4\}) = 5$.

$$v(\{i\}) = \mathrm{val}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{i}{2}$$

μεταξύ του παίκτη i και των $N \setminus \{i\}$.

Παράδειγμα 17.3: Παιχνίδι απλής αγοράς

> Έχουμε έναν αγρότη (A), βιομήχανο (B) και επενδυτή (E). A: Έχει αγρόκτημα κι αν το καλλιεργήσει κερδίζει 100€. B: Μπορεί να αγοράσει το αγρόκτημα και να χτίσει εργοστάσιο με κέρδος 200€. E: Αν το αγοράσει χτίζει εμπορικό κέντρο με έσοδα 300€.

$N = \{A, B, E\}$ $S = \{A\}, \{B\}, \{E\}, \{AB\}, \{AE\}, \{BE\}, \{ABE\}$ $v(A) = 100, v(B) = v(E) = 0$ $v(AB) = 200, v(AE) = 300, v(BE) = 0, v(ABE) = 300$

Σημείωση

Τελικά βρίσκονται στο βιβλίο. Μηλολιδάκης [1], εν. 10.2, σ. 392. Παραδείγματα 10.2.1-10.2.6.

17.2 Κανονικοποίηση

Μηλολιδάκης [1], εν. 10.3, σ. 396.

- Ορισμός 10.3.1.
- 0-1 κανονικοποίηση, σ. 397.
  - 0-κανονικοποίηση.
    - Μηδενικό παιχνίδι $v'(N) = 0 \implies v'(S) = 0\ \forall S$.
    - Επουσιώδες παιχνίδι $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$.
    - Ουσιώδες παιχνίδι $v'(N) > 0$.
  - 1-κανονικοποίηση.
- Παράδειγμα 10.3.1 (Το παιχνίδι της αποθάρρυνσης), σ. 399.

18 2024-12-05 Th

18.1 Ιδιότητες και κατηγορίες παιχνιδιών

Μηλολιδάκης [1], εν. 10.4, σ. 399.

18.1.1 Συμμαχίες

- Ουσιώδεις συμμαχίες, ορισμός 10.4.1, σ. 400.
- Ουσιώδης παίκτης, ορισμός 10.4.2, σ. 400.
- Επίπεδη συμμαχία, ορισμός. 10.4.3, σ. 401.

18.1.2 Ιδιαίτερες κατηγορίες παιχνιδιών

- Παιχνίδια που μπορούν να διασπαστούν, σ. 401.
- Απλά παιχνίδια, σ. 404.
- Ποσοστιαία παιχνίδια, σ. 404.
- Συμμετρικά παιχνίδια, σ. 405

18.2 Ασκήσεις κεφ. 10

Μηλολιδάκης [1], σ. 406.

18.2.1 Άσκηση 2

$$
\begin{gathered}
S \quad N \\
v(S) = -|N \setminus S| \\
v(N) = -|N|
\end{gathered}
$$

18.2.1.1 0-1 Κανονικοποίηση Έστω $n = 4$. $v(1) = v(2) = v(3) = (v_4) = -3$.

- $v(\{i, j\}) = v(i, j) = -2, v(i, j, k) = -1, v(N) = -4$
- $v'(i) = 0, v'(i, j) = -2 - v(i) - v(j) = 4$
- $v'(i, j, k) = -1 + 3 \cdot 3 = 8, v'(N) = 8$
- $v''(i) = 0, v''(i, j) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, v''(i, j, k) = 1, v''(N) = 1$

Επουσιώδης καθώς $N = \{1, 2, 3\} \cup \{4\}, v(N) = v(1, 2, 3) + v(4)$.

18.2.2 Άσκηση 8

$v(S) =$ αριθμός ζευγαριών $= \min(|S \cap P|), |S \cap Q|)$.

Σημείωση

Όχι συμμετρικό.

18.2.3 Άσκηση 7

$v(i) = 0, \forall i \in N.$

- $v(1, 2) = v(3, 4) = v(3, 5) = v(4, 5) = v(3, 4, 5) = 0.$
- $v(1, 3) = 1, v(1, 2, 3) = 1, v(1, 3, 4) = 2, v(1, 3, 4, 5) = 2, v(1, 2, 3, 4) = 2, v(N) = 3$ κτλ.

19 2024-12-10 Tu

19.1 Σύνολο αποδόσεων

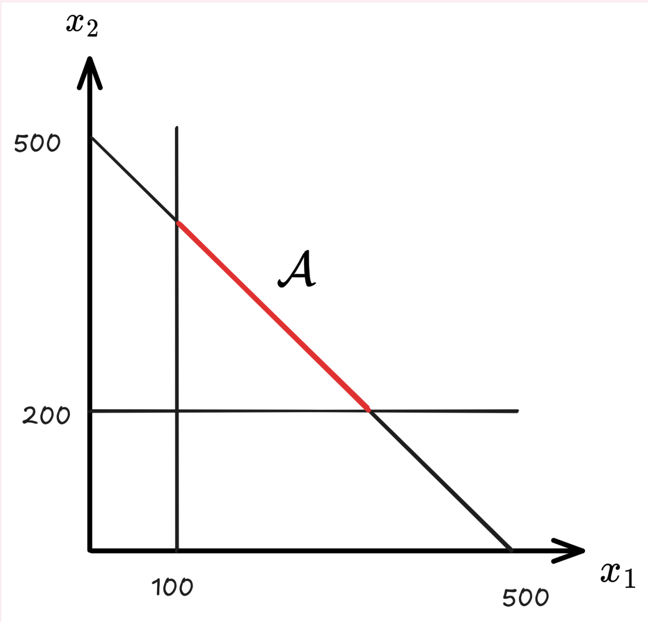
Μηλολιδάκης [1], εν. 11.1, σ. 412.

$\mathscr{A} \neq 0$ καθώς $v(N) \geq \sum v(i) \implies \Delta = v(N) - \sum v(i) = v'(N)$.

19.1.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 19.1

$N = \{1,2\}, v(1) = 100, v(2) = 200, v(1,2) = 500$. $\mathscr{A}\,:\, x_1 \geq 100, x_2 \geq 200, x_1 + x_2 = 500$.



Παράδειγμα 19.2

$N = \{1,2,3\}, v(1) = 100, v(2) = 200, v(3) = 50,\ v(1,2) = 400, v(1,3) = 200, v(2,3) = 300, v(1,2,3) = 500$.

$$
\mathscr{A}\,:\,
\begin{array}{r}
x_1 \geq 100 \\
x_2 \geq 200 \\
x_3 \geq 50 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 500 \\
\hline
x_1 + x_3 \geq 400 \\
x_1 + x_3 \geq 200 \\
x_2 + x_3 \geq 300
\end{array}
$$

με τις επιπλέον συνθήκες κάτω από τη γραμμή να αποτελούν τον *συμμαχικό ορθολογισμό*.
Επίσης έχουμε $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N$. Άρα

$$\mathscr{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq v(i), i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N), \sum_{i\in S} x_i \geq v(S), S \quad N, |S| \geq 2 \right\}$$

19.2 Πυρήνας

Μηλολιδάκης [1], εν. 11.2, σ. 412.

$C \subset \mathscr{A} \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

- Ορθολογική απόδοση, σ. 413.
- Πυρήνας, ορισμός 11.2.1, σ. 413.

19.2.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 19.3: Επουσιώδες παιχνίδι

$$v'(N) = 0, v(S) = v(S_1) + v(S_2) \forall S, S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset \iff$$
$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i), C : x_i \geq v(i), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum x_i = v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i) \iff$$
$$C = \{x = (v(1), v(2), \dots, v(n))\}$$

- Παράδειγμα 11.2.1 (Ο κανόνας της πλειοψηφίας για $n \geq 3$), σ. 414.
- Παράδειγμα 11.2.2 (Το παιχνίδι της απλής αγοράς), σ. 414.
- Παράδειγμα 11.2.3 (Ο κανόνας της ομοφωνίας), σ. 416.

20 2024-12-12 Th

20.1 Τιμή Shapley

Μηλολιδάκης [1], εν 12.2, σ. 448.

- Παράδειγμα 12.1.1 (Το παιχνίδι της απλής αγοράς), σ. 447.
- Τιμή Shapley, Ορισμός 12.2.1, σ. 449.

$$\varphi : \mathscr{G} \to \mathbb{R}^n$$

> Διανομή του κοινωνικού πλούτου $v(N)$ όπου το $\varphi_i[v]$ αντιπροσωπεύει το ποσό ωφέλειας που θα δοθεί στον i-παίκτη.

- Αξιώματα τιμής Shapley [1, σσ. 449–451]:
  1. Ανωνυμία Μετάθεση του N: ∂. Τότε, $\partial v(S) = v(\partial S), \forall S \subset N \implies \varphi[\partial v] = \partial \varphi[v]$.
  2. Αποτελεσματικότητα Τιμή Shapley συλλογικά ορθολογική: $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i[v] = v(N)$.
  3. Μηδέν-άχρηστου παίκτη Ο i 0-άχρηστος $\implies \varphi_i[v] = 0$.
  4. Προσθετικότητας > [!note] > > Για δύο χαρακτηριστικές συναρτήσεις v, w ισχύει ότι $v + w$ επίσης χαρακτηριστική συνάρτηση.

     $\varphi[v + w] = \varphi[v] + \varphi[w]$.
- Θεώρημα 12.3.1, σ. 452.

- Τύπος τιμής Shapley, σ. 454-456

$$\begin{aligned}\varphi_i[v] = E\Delta_\pi &= \sum_{\pi\in S_n} \frac{1}{n\,!}\pi(i) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}[v(P_\pi(i)\cup\{i\}) - v(P_\pi(i))] \\ &= \sum_{S\subset N, t\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S\setminus\{i\})]\end{aligned}$$

- Πόρισμα 12.3.1, σ. 458. Η τιμή Shapley υπάρχει, είναι μοναδική, και δίνεται από την παραπάνω σχέση.

20.1.1 Ιδιότητες της τιμής Shapley

Μηλολιδάκης [1], σ. 458.

> Στα παιχνίδια με τρεις παίκτες μπορούμε να γράψουμε αναλυτικά τις 6 μεταθέσεις και να υπολογίσουμε για κάθε μία την περιθώρια συνεισφορά του κάθε παίκτη. Αθροίζοντας και διαιρώντας με το 6, έχουμε τη μέση περιθώρια συνεισφορά, δηλαδή την τιμή Shapley.

- Παράδειγμα 12.5.1 (Το παιχνίδι της απλής αγοράς), σ. 460.

21 2024-12-17 Tu

21.1 Παραδείγματα υπολογισμού της τιμής Shapley

Μηλολιδάκης [1], σ. 460.

21.1.1 Απλά παιχνίδια

$i \mid \Delta_\pi(i) = v(P_\pi(i)\cup\{i\}) - v(P_\pi(i)) = 1 \implies i\,:\,$ *στροφέας* (swinger).

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{n!}\left|\{\pi \mid i \text{ swinger}\}\right|$$

- Παράδειγμα 12.5.2 (Σύστημα ψηφοφορίας με έναν ισχυρό παίκτη), σ. 462.
  - ☐ Συμπλήρωμα εναλλακτικών λύσεων.
- Παράδειγμα 12.5.3 (Το συμβούλιο ασφαλείας του ΟΗΕ), σ. 462.
- Παράδειγμα 12.5.4 (Μισθωτή εργασία και κεφάλαιο), σ. 463.

22 2024-12-19 Th

22.1 Άσκηση 1, θέμα 2019

> n αγρότες έχουν βιολογικές καλλιέργειες. w_j το κέρδος του αγρότη j από τη καλλιέργεια. $w_1 < b < w_2 < \cdots < w_n$. Ο 1 μπορεί να καταργήσει τη βιολογική καλλιέργεια και θα έχει κέρδος $b > w_1$. Όλοι θα χάσουν τη βιολογική πιστοποίηση και θα έχουν κέρδος μηδέν.
> 1. Βρείτε τη χαρακτηριστική συνάρτηση.
> 2. $n = 3$. Βρείτε τον πυρήνα.
> 3. Βρείτε τη τιμή Shapley.

22.1.1 Υποερώτημα 1

$v(1) = b, v(j) = 0, j = 2, \dots, n.$

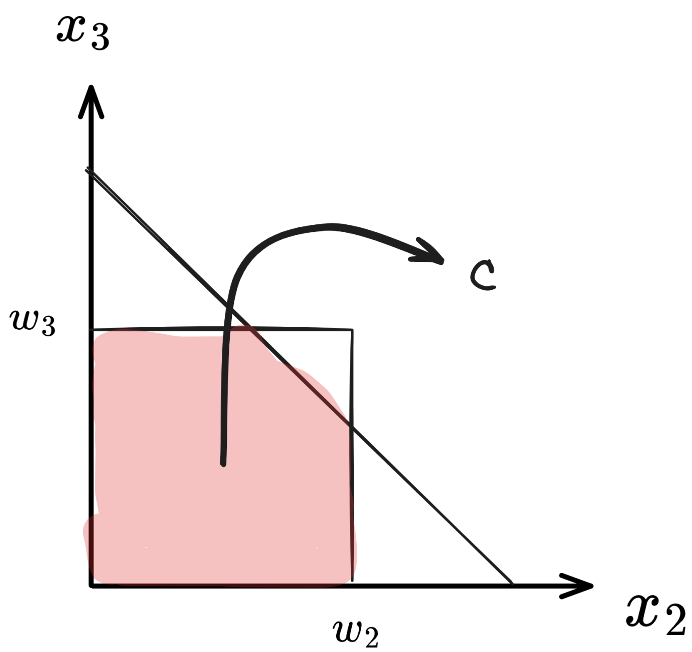
$$v(S) = \begin{cases} \sum_{j \in S} w_j, & 1 \in S \\ 0, & 1 \notin S \end{cases}$$

22.1.2 Υποερώτημα 2

$x_1 \geq b, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$ $x_1 + x_2 \geq w_1 + w_2, x_1 + x_3 \geq w_1 + w_3, x_2 + x_3 \geq 0.$ $x_1 + x_2 + x_3 = w_1 + w_2 + w_3 \iff x_1 = w_1 + w_2 + w_3 - x_2 - x_3.$

$$\begin{aligned} x_1 \geq b &\implies w_1 + w_2 + w_3 - x_2 - x_3 \geq b \implies x_2 + x_3 \leq w_1 + w_2 + w_3 - b \\ &\implies w_1 + w_2 + w_3 - x_2 - x_3 + x_2 \geq w_1 + w_2 \implies x_3 \leq w_3 \end{aligned}$$

Όμοια βγαίνει ότι $x_2 \leq w_2$.



22.1.3 Υποερώτημα 3

π	1	2	3
1 2 3	b	$w_1 + w_2 - b$	w_3
1 3 2	b	w_2	$w_1 + w_3 - b$
2 1 3	$w_1 + w_2$	0	w_3
2 3 1	$w_1 + w_2 + w_3$	0	0
3 1 2	$w_1 + w_3$	w_2	0
3 2 1	$w_1 + w_2 + w_3$	0	0

$$\Delta_\pi(i) = v(P_\pi(i) \cup \{i\}) - v(P_\pi(i)) = v(1,2) - v(1) = w_1 + w_2 - b$$

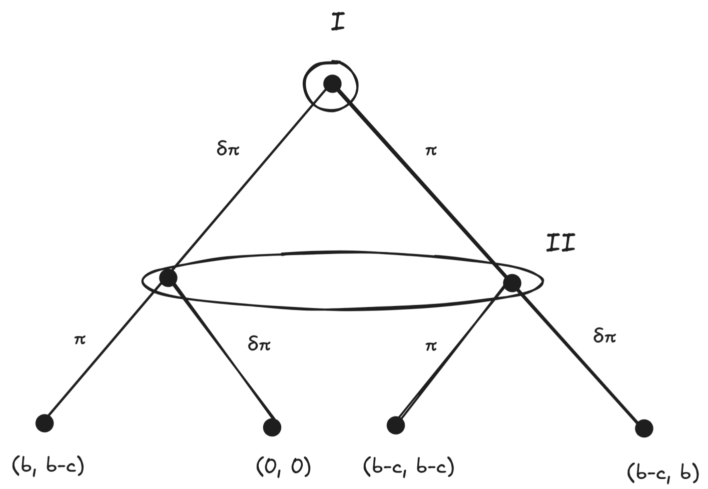
$$\begin{aligned} \varphi_i[v] &= \frac{1}{n!} \sum_\pi \Delta_\pi(i) \\ \varphi_1[v] &= \frac{4w_1 + 3w_2 + 3w_3 + 2b}{6} \\ \varphi_2[v] &= \frac{3w_2 + w_1 - b}{6} \\ \varphi_3[v] &= \frac{3w_3 + w_1 - b}{6} \end{aligned}$$

22.2 Άσκηση 2

2 άτομα βρίσκονται κάπου όπου ένας σκύλος πνίγεται σε νερό. Αν σωθεί ο σκύλος ο καθένας έχει ωφέλεια b. Όποιος πέσει στο νερό να τον σώσει έχει ένα κόστος c. Υποθέστε ότι $0 < c < b$.

1. Βρείτε τα ΣΣΙ.
2. Σε κάθε ΣΣΙ, ποια είναι η πιθανότητα να σωθεί ο σκύλος;

22.2.1 Υποερώτημα 1



Καταρχάς παρατηρούμε ότι πρόκειται για πινακοπαιχνίδι.

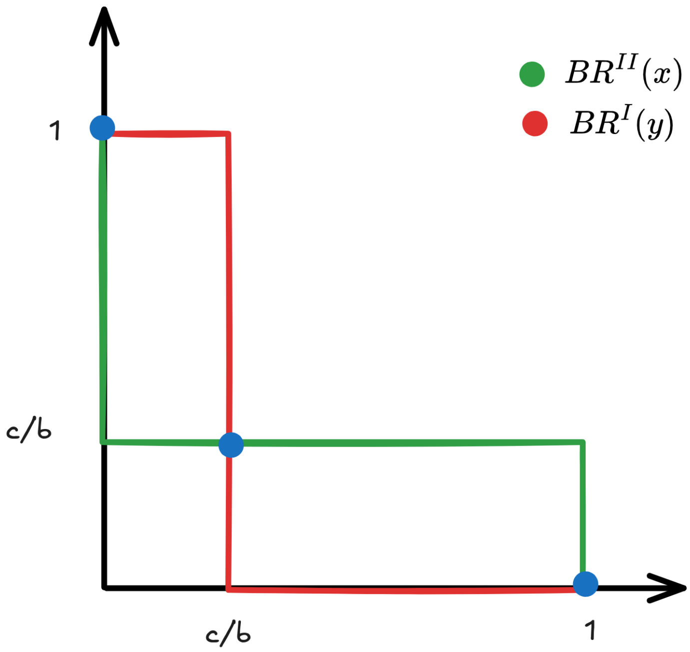
$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b-c & b-c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ b & b-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h^I(x,y) &= x^T A y = bx(1-y) + (b-c)(1-x)y + (b-c)(1-x)(1-y) = \ldots \\ &= (c-by)x + (b-c) \end{aligned}$$

$$BR^I(y) = \begin{cases} \{0\}, & y > \frac{c}{b} \\ [0,1], & y = \frac{c}{b} \\ \{1\}, & y < \frac{c}{b} \end{cases}$$

$$h^{II}(x,y) = x^T B y = x^T A^T y = y^T A x = h^I(y,x) = \cdots = (c - bx)y + (b - c)$$

$$BR^{II}(x) = \begin{cases} \{0\}, & x > \frac{c}{b} \\ [0,1], & x = \frac{c}{b} \\ \{1\}, & x < \frac{c}{b} \end{cases}$$



ΣΣΙ:

1. $(x = 1, y = 0), x = P(\delta\pi)$
2. $(x = 0, y = 1), y = P(\delta\pi)$
3. $\left(x = y = \frac{c}{b}\right)$

22.2.2 Υποερώτημα 2

1. $(x = 1, y = 0)$ $P(\sigma\acute{\omega}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota) = 1$
2. $(x = 0, y = 1)$ $P(\sigma\acute{\omega}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota) = 1$
3. $\left(x = y = \frac{c}{b}\right)$ $P(\sigma\acute{\omega}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota) = 1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2$

22.3 Άσκηση 3

Μηλολιδάκης [1], άσκηση 4.10.21, σ. 133.

x εξισωτική αν $x^T A_{\cdot j} = v, \forall j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} x^T A_{.j} &= (x_1, \dots, x_n)(A_{.1}, A_{.2,}, \dots, A_{.n}) = (v, v, \dots, v) \implies x^T = (v, v, \dots, v) \\ &= x^T AB = (v, v, \dots, v)B \implies x^T = (v, ..., v)B \end{aligned}$$

Άρα

$$x_j = (v, v, \dots, v)B_{.j} = (v, v, \dots, v)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = v\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \implies$$

$$\sum x_j = v\sum_j \sum_i b_{ij} = 1 \implies$$

$$v = \frac{1}{\sum_j \sum_i b_{ij}} \implies x_j = \frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_{i,j} b_{ij}}$$

Πρέπει $x_j \geq 0 \forall j$.

22.4 Άσκηση 4

Μηλολιδάκης [1], άσκηση 4.10.4, σ. 129.

23 2025-01-07 Tu

23.1 Άσκηση

> Π.π. με
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
>
> 1. Για ποιες τιμές του t υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές;
> 2. Να βρεθούν τα ΣΣΙ για κάθε t.
> 3. Για ποιες τιμές του t έχει πλεονέκτημα ο παίκτης I;

23.1.1 Ερώτημα 1

- $\underline{u} = \max(\min(t, 1), \min(t, 4)) = \min(t, 4)$
- $\overline{u} = \min(\max(t, 4), \max(t, 1)) = \max(t, 1)$

Κάνοντας γραφική παράσταση, βρίσκουμε ότι t ΣΣΙ για $t \in [1, 4] \iff \underline{u} = \overline{u}$.

23.1.2 Ερώτημα 2

23.1.2.1 Για $t \in [1, 4]$

- $t = 1 : \underline{u} = 1, \overline{u} = 1$. Άρα, ΣΣΙ τα a_{11}, a_{21} και $v_A = 1$.
- $t = 4$: ΣΣΙ τα a_{21}, a_{22} και $v_A = 4$.
- $1 < t < 4$: ΣΣΙ το a_{21} και $v_A = t$.

Άρα γενικά $v_A = t, t \in [1, 4]$.

23.1.2.2 Για $t \notin [1,4]$ Παίρνουμε εξισωτικές στρατηγικές.

- $I \,:\, x + t(1-x) = tx + 4(1-x) \implies x = \frac{t-4}{2t-5}, 1-x = \frac{t-1}{2t-5}$.
- $II \,:\, y + t(1-y) = ty + 4(1-y) \implies y = \frac{t-4}{2t-5}, 1-y = \frac{t-1}{2t-5}$.

Προσοχή

Οι πιθανότητες δεν μηδενίζουν γιατί δεν ισούται ποτέ το t με 1 ή 4.

Συμβουλή

Αν βάλουμε στο t 1 ή 4, θα παρατηρήσουμε ότι τα ΣΣΙ ισούνται με αυτά που βρήκαμε σε καθαρές στρατηγικές (στα a_{11}, a_{22}, ποτέ στο a_{21}).

$$val(A) = x^0 + t(1-x^0) = \frac{t-4+t(t-1)}{2t-5} = \frac{t^2-4}{2t-5}$$

Άρα συνολικά έχουμε:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{t^2-4}{2t-5}, & t \notin [1,4] \\ t, & t \in [1,4] \end{cases}$$

23.1.3 Ερώτημα 3

Προσοχή

Πρέπει $v > 0$.

Το $v(t) < 0 \iff t \leq 1 \wedge \frac{t^2-4}{2t-5} < 0 \implies t < 1 \wedge \underbrace{t^2-4>0}_{2t-5<0} \implies t < -2$.

Άρα ο I έχει πλεονέκτημα για $t \geq -2$.

23.2 Άσκηση

- n εταιρείες πληροφορικής. Θέλουν να αγοράσουν χώρο.
- w_j = ανάγκες εταιρείας j σε χώρο.
- Κόστος αγοράς χώρου $w = a + bw, a, b > 0$.
- Επιτρέπονται οι συμμαχίες ανάμεσα σε εταιρείες.

1. Να το εκφράσεται σε συμμαχική μορφή, να ορίσετε τη χαρακτηριστική συνάρτηση.
2. 0-1 κανονική μορφή.
3. Πυρήνα για $n = 3$.
4. Τιμή Shapley $\varphi[v'']$.

23.2.1 Ερώτημα 1

$N = \{1, \dots, n\}$. $S \neq \emptyset$. $v(\emptyset) = 0$.

$$v(S) = -a - b\sum_{j\in S} w_j$$

23.2.1.1 Απόδειξη υπερπροσθετικότητας $S \cap T = \emptyset$.

$$v(S\cup T) = -a - b\sum_{j\in S\cup T} w_j = a - b\sum_{j\in S} w_j - b\sum_{j\in T} w_j$$
$$v(S) + v(T) = -2a - b\sum_{j\in S} w_j - b\sum_{j\in T} w_j < u(T\cup S)$$

23.2.2 Ερώτημα 2

- 0-κανονική μορφή:

$$v'(S) = v(s) - \sum_{j\in S} v(j) = -a - b\cancel{\sum_{j\in S} w_j} - \sum_{j\in S} \cancel{\underbrace{(-a - bw_j)}_{v(j)}} = (|S| - 1)a$$

Άρα $v'(N) = (n-1)a > 0$. Άρα πρόκειται για *ουσιώδες* παιχνίδι.

- 1-κανονική μορφή:

$$v''(s) = \frac{v'(S)}{v'(N)} = \frac{|S| - 1}{n-1}$$

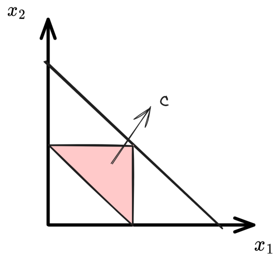
23.2.3 Ερώτημα 3

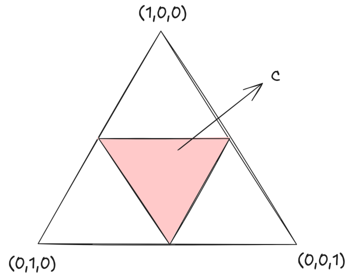
Σε 0-1:

$$v''(1) = v''(2) = v''(3) = 0$$
$$v''(1,2) = v''(1,3) = v''(2,3) = \frac{1}{2}$$
$$v''(1,2,3) = 1$$

Θέλουμε

$$\begin{aligned}
x_1'' &\geq 0 \\
x_2'' &\geq 0 \\
x_3'' &\geq 0 \\
x_1'' + x_2'' &\geq \frac{1}{2} \iff x_3'' \leq \frac{1}{2} \\
x_1'' + x_3'' &\geq \frac{1}{2} \iff x_2'' \leq \frac{1}{2} \\
x_2'' + x_3'' &\geq \frac{1}{2} \iff x_1'' \leq \frac{1}{2} \\
x_1'' + x_2'' + x_3'' &= 1 \iff x_1'' + x_2'' + x_3'' = 1
\end{aligned}$$





23.2.4 Ερώτημα 4

Συμμετρικοί παίκτες. Άρα

$$\varphi_i[v''] = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$$

Συμβουλή

Για να βρούμε πώς θα μοιραστεί το κόστος, αλλάζουμε πρόσημο στην ωφέλεια.

Θεώρημα 23.1

Αν $\varphi[v]$ η τιμή Shapley για χαρακτηριστική συνάρτηση v, τότε

$$\varphi_i[v''] = \frac{\varphi_i[v] - v(i)}{v'(N)} \implies \varphi_i[v] = v(i) + \varphi_i[v'']v'(N)$$

Άρα

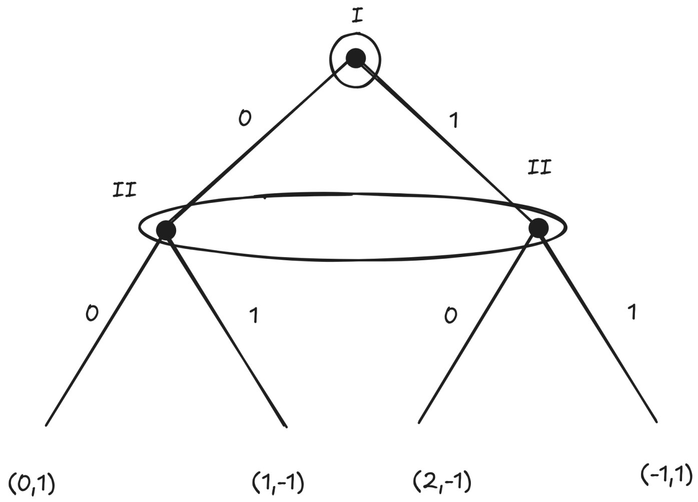
$$\varphi_i[v] = -a - bw_j + \frac{1}{n}(n-1)a = a\left[\frac{n-1}{n} - 1\right] - bw_j = -\frac{a}{n} - bw_j$$

Δηλαδή, το κόστος του παίκτη i, σύμφωνα με την τιμή Shapley, θα είναι

$$\frac{a}{n} + bw_j$$

23.3 Άσκηση

> Δύο παίκτες ποντάρουν από 1€. Γράφουν 0 ή 1 σε ένα χαρτί. Αν γράψουν το ίδιο, τότε ο II παίρνει τα 2€. Αν γράψουν διαφορετικά, ο I τα παίρνει.
> Ένας εξωτερικός παρατηρητής δίνει επιπλέον 1€ στον I αν ο II επιλέξει 0.
> Να βρεθούν ΣΣΙ κτλ.



Πρόκειται για δ.π.π, καθώς δεν είναι 0-αθροίσματος.

☐ Επίλυση

24 2025-01-14 Tu

24.1 Άσκηση

Π.π. με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, a \neq 1$$

1. Βρείτε τα ΣΣΙ και την τιμή του παιχνιδιού.
2. Οι δύο παίκτες παίζουν ένα αναδρομικό παιχνίδι 0-αθροίσματος με τους εξής κανόνες: Αρχικά, ένας μετρητής παίρνει την τιμή n. Στο βήμα n (δηλαδή n παιχνίδια πριν το τέλος) ο κάθε παίκτης επιλέγει ξεχωριστά έναν αριθμό από το $\{0, 1\}$. Αν επιλέξουν τον ίδιο αριθμό, τότε ο II πληρώνει 1 στον I και το παιχνίδι τερματίζεται. Αν επιλέξουν διαφορετικούς, ο μετρητής μειώνεται κατά 1 και το παιχνίδι συνεχίζεται. Αν ο μετρητής φτάσει στο 0, τότε το παιχνίδι σταματάει και ο II πληρώνει τον I $a \neq 1$ μονάδες ωφέλειας. Να βρεθούν τα ΣΣΙ και η τιμή του παιχνιδιού.

24.1.1 Ερώτημα 1

Πρώτα ψάχνουμε αν υπάρχει σαγματικό σημείο, ώστε να δούμε αν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Έχουμε $\underline{u} = \min(a, 1), \overline{u} = \max(a, 1)$. Για να είναι ίσα, πρέπει $a = 1$. Οπότε, $\underline{u} < \overline{u}$. Άρα, για να βρούμε το ΣΣΙ ψάχνουμε *εξισωτικές στρατηγικές*.

Για τον I έχουμε:

$$x + a(1 - x) = ax + 1 - x \iff x = \frac{1}{2} \implies x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα για τον II, βρίσκουμε ότι

$$y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Η τιμή του παιχνιδιού είναι (από την σχέση των στρατηγικών x):

$$\text{val}(A) = \frac{1}{2} + a\frac{1}{2} = \frac{a+1}{2}$$

24.1.2 Ερώτημα 2

$$\Gamma_n = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \text{Val}(\Gamma_{n-1}) \\ \text{Val}(\Gamma_{n-1}) & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$v_n = \text{Val}\left(\begin{pmatrix} 1 & v_{n-1} \\ v_{n-1} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Βλέπουμε ότι

$$v_1 = \text{Val}\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{a+1}{2}, \quad a \neq 1$$

Έστω $v_n = \text{Val}(\Gamma_n)$. Έχουμε ότι

$$v_n = \text{Val}\left(\begin{pmatrix} 1 & v_{n-1} \\ v_{n-1} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Αν $v_{n-1} \neq 1 \implies v_n = \frac{v_{n-1}+1}{2}$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $v_{n-1} \neq 1$.

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $v_{n-1} \neq 1, \forall n$.

- Για $n = 1$, $v_1 = \frac{a+1}{2} \neq 1, a \neq 1$.
- Έστω $v_n \neq 1 \implies$

$$v_{n+1} = \text{Val}\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{v_n} \\ \mathrm{v_n} & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{v_n + 1}{2} \neq 1$$

Επομένως $v_n \neq 1, \forall n = 1, 2, \cdots \implies v_{n+1} = \frac{v_n+1}{2}, n = 1, 2, \ldots$ με $v_1 = \frac{a+1}{2}$.

Τώρα θα βρούμε την κλειστή μορφή για το v_n. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \\ v_2 &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{a+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{a+3}{4} \\ v_3 &= \frac{1}{2}\frac{a+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{a+7}{8} \end{aligned}$$

- **Επαγωγική υπόθεση**:

$$v_n = \frac{a + 2^n - 1}{2^n}$$

- Ισχύει για $n = 1$.
- Έστω ότι ισχύει για n. Τότε,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{a+2^n-1}{2^n} + \frac{1}{2} = \frac{a+2^n-1+2^n}{2^{n+1}} = \frac{a+2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$$

Άρα η τιμή του παιχνιδιού n ισούται με $\frac{a+2^n-1}{2^n}$. Τα ΣΣΙ είναι

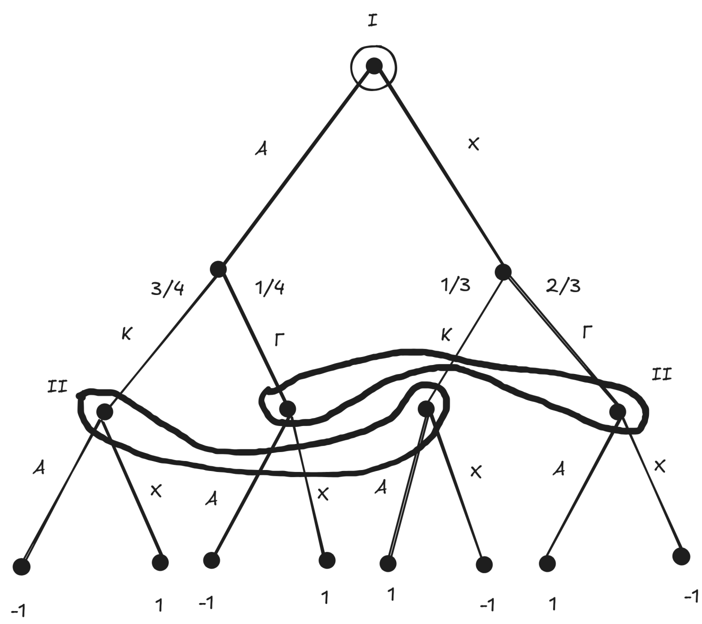
$$x_n^* = y_n^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

που βγαίνει από το 1ο ερώτημα, αφού δείξαμε ότι $v_n \neq 1$.

24.2 Άσκηση

Δύο νομίσματα, ένα ασημένιο κι ένα χάλκινο. Το ασημένιο φέρνει κορώνα με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ ενώ το χάλκινο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι:
- Ο I επιλέγει ένα και το ρίχνει.
- Ανακοινώνει *μόνο* το αποτέλεσμα.
- Ο II μαντεύει ποιο νόμισμα ρίχτηκε.
- Αν το βρει, κερδίζει μία μονάδα, αν το χάσει, χάνει μία μονάδα.

Να βρεθούν τα ΣΣΙ κι η τιμή του παιχνιδιού.



$$S^I = \{A, X\} \qquad S^{II} = \{AA, AX, XA, XX\}$$

Άρα,

$$A = \begin{array}{c} A \\ X \end{array}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

όπου π.χ. έχουμε $A_{A,AX} = \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}1 = -\frac{2}{4}$.

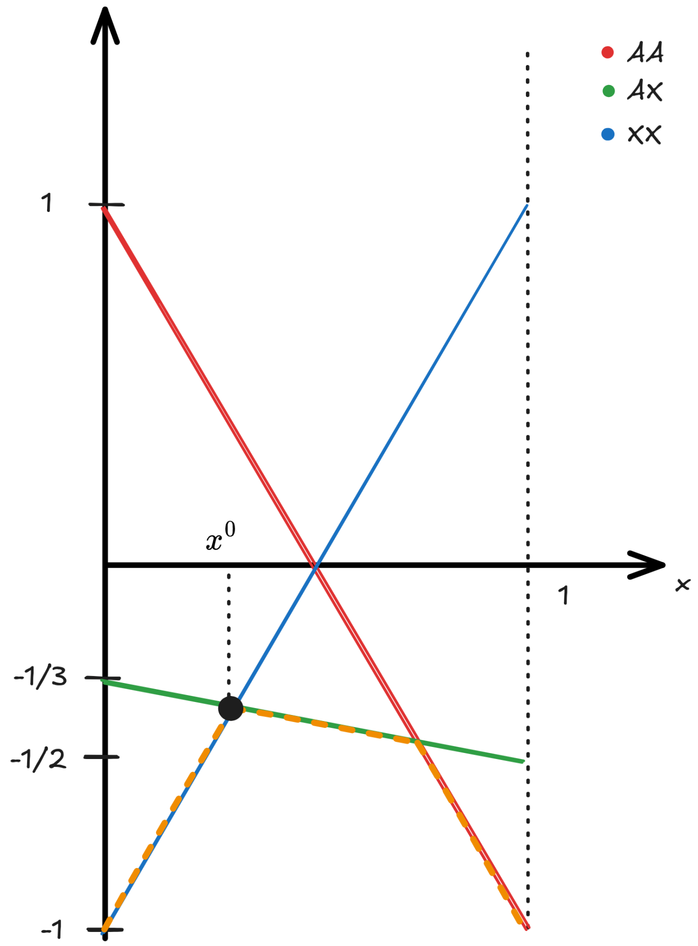
Μπορούμε να κάνουμε *απλοποίηση* στον πίνακα A, καθώς η στήλη XA κυριαρχείται από την AX (κάθε στοιχείο της XA είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου της AX). Οπότε ο πίνακας A παίρνει την μορφή

$$A = \begin{array}{c} A \\ X \end{array}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές, καθώς $\underline{u} = -1, \overline{u} = -\frac{1}{2}$.

Καταλήγουμε σε παιχνίδι 2 × 3. Άρα μπορούμε να το επιλύσουμε γραφικά. Πρέπει δηλαδή να βρούμε το $\min\left(-x + 1 - x, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(1-x), x - (1-x)\right)$, όπου

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \left\{ \min\left(-x + 1 - x, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(1-x), x - (1-x)\right) \right\}$$



Η κάτω περιβάλλουσα είναι η τιμή του εσωτερικού min. Το max βρίσκεται στην τομή των ευθειών AX, XX. Οπότε, στο ΣΣΙ, έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

κι ο II τυχαιοποιεί ανάμεσα στις στρατηγικές AX, XX. Δηλαδή, στο ΣΣΙ δεν επιλέγει ποτέ AA.

Με εξισωτικές στρατηγικές, βγαίνει ότι

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

και $v = -\frac{5}{13}$.

24.3 Άσκηση

Μια ΜΚΟ ζητά από δύο εθελοντές να συμμετέχουν σε ένα έργο. Ο καθένας απαντάει "ναι" ή "όχι" χωρίς να γνωρίζει την απάντηση του άλλου. Το έργο θα γίνει αν τουλάχιστον ένας δεκτεί, αλλιώς θα ματαιωθεί.

- Το έργο έχει ωφέλεια v σε κάθε συμμετέχοντα.
- Αν δεχτεί μόνο ένας, αυτός έχει επίσης κόστος $v + \delta, (\delta > 0)$.
- Αν δεχτούν κι οι δύο, τα κόστη τους είναι 0.

Να βρεθούν τα ΣΣΙ, οι πληρωμές των παικτών κι η πιθανότητα να εκτελεστεί το έργο σε κάθε ΣΣΙ.

Πρόκειται για διπινακοπαιχνίδι. Έστω $S = \{\delta, o\}$ για "δέχεται" και "όχι".

$$A = \begin{array}{c} \delta \\ o \end{array} \begin{pmatrix} v & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} v & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$$

$$h^I(x, y) = x^T A y = vxy - \delta x(1 - y) = x(vy - \delta(1 - y)) = x(y(v + \delta) - \delta)$$

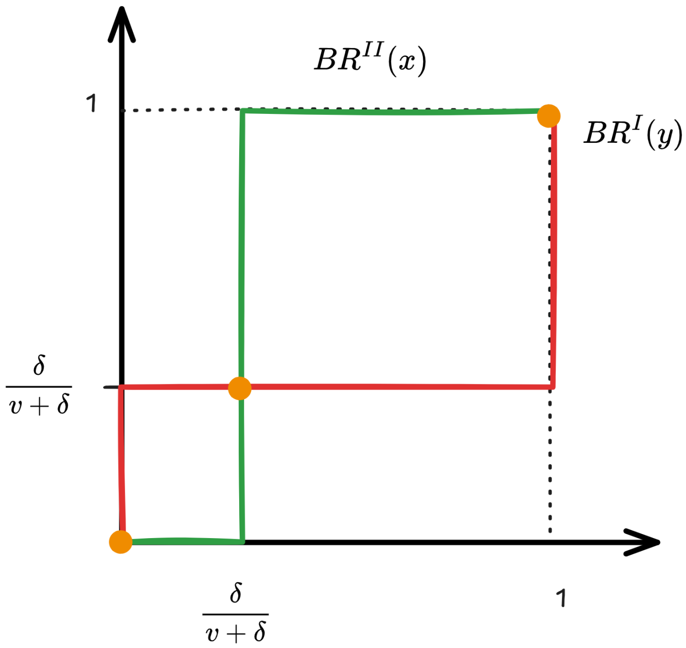
$$\max_x h^I(x, y) \implies BR^I(y) = \begin{cases} \{0\}, & y < \frac{\delta}{v+\delta} \\ [0, 1], & y = \frac{\delta}{v+\delta} \\ \{1\}, & y > \frac{\delta}{v+\delta} \end{cases}$$

Εφόσον $B = A^T$,

$$h^{II}(x, y) = x^T B y = x^T A^T y = y^T A x = h^I(y, x)$$

άρα

$$BR^{II}(x) = \begin{cases} \{0\}, & x < \frac{\delta}{v+\delta} \\ [0, 1], & x = \frac{\delta}{v+\delta} \\ \{1\}, & x > \frac{\delta}{v+\delta} \end{cases}$$



Άρα τα ΣΣΙ είναι τα:

1. $(0,0) \implies$ (όχι, όχι). $h^I = h^{II} = 0$, πιθανότητα εκτέλεσης = 0.
2. $(1,1) \implies (\delta,\delta)$. $h^I = h^{II} = v$, πιθανότητα εκτέλεσης = 1.
3. $\left(\frac{\delta}{v+\delta}, \frac{\delta}{v+\delta}\right)$. $h^I = h^{II} = 0$ από πάνω, πιθανότητα εκτέλεσης $= 1 - \left(\frac{v}{v+\delta}\right)^2$.

24.4 Άσκηση

> n άτομα. Ο 1 είναι προγραμματιστής βάσεων δεδομένων. Οι $2, \ldots, n$ είναι γενικοί προγραμματιστές. Αν μια ομάδα δεν περιλαμβάνει τον 1, τότε έχει ωφέλεια 0. Αν περιλαμβάνει τον 1, τότε η ωφέλεια είναι ίση με το πλήθος της ομάδας.
> 1. Να εκφραστεί $\langle N, v\rangle$.
> 2. C για $n = 3$.
> 3. Τιμή Shapley για γενικό n.
> 4. Τιμή Shapley για $n = 3$.

24.4.1 Ερώτημα 1

$$v(S) = \begin{cases} 0, & 1 \notin S \\ |S|, & 1 \in S \end{cases}$$

□ Νδο είναι χαρακτηριστική συνάρτηση. Συνοπτικά, περιπτώσεις δύο συμμαχιών όπου είτε καμία δεν έχει τον 1 ή τον έχει η μία. Αν καμία δεν τον έχει, η ωφέλεια της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των ωφελειών τους (0=0+0). Αν η μία τον έχει, τότε η ωφέλεια της ένωσης είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ωφελειών ($|S_1 + S_2| \geq |S_1| + 0$) άρα το παιχνίδι είναι ουσιώδες.

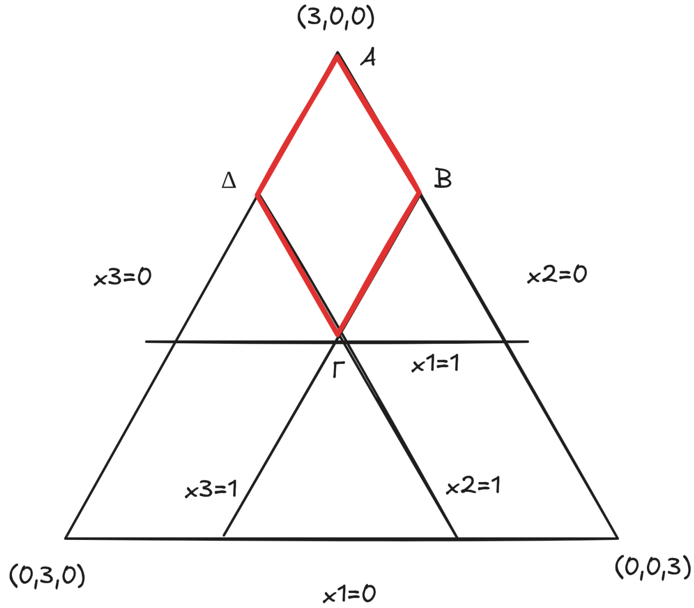
24.4.2 Ερώτημα 2

$n = 3$.

$$\begin{array}{r|c|}
v(1) = 1 & x_1 \geq 1 \\
v(2) = 0 & x_2 \geq 0 \\
v(3) = 0 & x_3 \geq 0 \\
v(1,2) = 2 & x_1 + x_2 \geq 2 \\
v(1,3) = 2 & x_1 + x_3 \geq 2 \\
v(2,3) = 0 & x_2 + x_3 \geq 0 \\
v(1,2,3) = 3 & x_1 + x_2 + x_3 = 3
\end{array}
\boxed{\begin{array}{c}
x_1 \geq 1 \\
x_2 \geq 0 \\
x_3 \geq 0 \\
x_3 \leq 1 \\
x_2 \leq 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 3
\end{array}}$$

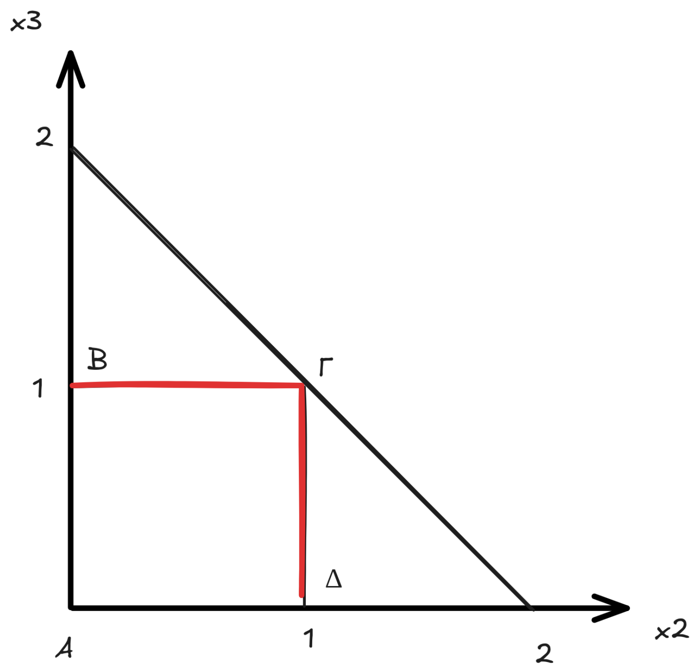
άρα οι σχέσεις μέσα στο κουτί περιγράφουν το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που αποτελεί τον πυρήνα.

Σχεδιάζουμε το simplex x_1, x_2, x_3 που είναι το ισόπεδο τρίγωνο με σημεία $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.



Το υποσύνολο που ικανοποιεί τις παραπάνω ανισώσεις είναι το τμήμα μέσα στον κόκκινο ρόμβο, δηλαδή ο πυρήνας.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε μία μεταβλητή συναρτήσει των άλλων δύο, π.χ. $x_1 = 3 - x_2 - x_3$, και να σχεδιάσουμε στο σύστημα αξόνων x_2, x_3.



με την αντιστοιχία των σημείων να διατηρείται.

24.4.3 Ερώτημα 3

Έχουμε ότι

$$\varphi[v] = (\varphi_1[v], \dots, \varphi_n[v])$$

Σημείωση

Για την τιμή Shapley γνωρίζουμε ότι:

1. Είναι διάνυσμα που δίνει τη δίκαιη αμοιβή του παίκτη i για να συμμετέχει στη μεγάλη συμμαχία.
2. Υπάρχει πάντα.
3. Είναι μοναδική.
4. Αν ο πυρήνας υπάρχει, η τιμή Shapley μπορεί να εμπεριέχεται σε αυτόν, μπορεί και όχι.
5. Είναι αποτελεσματική $(\varphi_1[v] + \dots \varphi_n[v] = v(N))$
6. Συμμετρικοί παίκτες έχουν ίσες πληρωμές.

Από το 5, έχουμε ότι $v(N) = |N| = n$. Από το 6, έχουμε ότι

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \beta \qquad \varphi_1 = a$$

Άρα, από τα παραπάνω βγαίνει ότι $a + (n-1)\beta = n$.

Για να βρούμε τη τιμή Shapley του 1, παίρνουμε μία τυχαία μετάθεση του $\{2, 3, \dots, n\}$ και βλέπουμε πόσο συνεισφέρει σε αυτήν τη μετάθεση. Αν ο 1 μπει στη θέση k,

$$\underbrace{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}_{P_\pi(1)}, 1, i_{k+1}, \dots, i_n$$

η συνεισφορά του θα είναι

$$v(P_\pi(1) \cup \{1\}) - v(P_\pi(1)) = k - 0 = k$$

Υπάρχουν $(n-1)!$ μεταθέσεις όπου ο 1 είναι στη θέση k.

$$\begin{aligned}
\varphi_1[v] &= \Delta(1) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P_\pi(1) \cup \{1\}) - v(P_\pi(1))] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (n-1)! \cdot k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Άρα $a = \frac{n+1}{2}$. Επομένως, $\beta = \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\varphi[v] = \left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$$

24.4.4 Ερώτημα 4

Για $n = 3$,

$$\varphi[v] = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

όπου ανήκει στον πυρήνα.

☐ Εύρεση τιμής Shapley για $n = 3$ χωρίς ερώτημα 3. Δυνατές μεταθέσεις, πίνακας κτλ.

Αναφορές

[1] Κ. Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. ΣΟΦΙΑ, 2009, 616 **pagetotals**.