K06 Ανάλυση II

Σημειώσεις 2024-2025

Κωνσταντίνος Χούσος

Περίληψη

Διανύσματα και διανυσματικές συναρτήσεις στο επίπεδο και στο χώρο, εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο, ευθείες, επίπεδα, επιφάνειες, μήκος τόξου, μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, σύστημα αναφοράς TNB. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όριο, συνέχεια, μερικές παράγωγοι, αλυσιδωτή παραγώγιση, κατευθυνόμενη παράγωγος, διανύσματα κλίσεως, εφαπτόμενα επίπεδα, γραμμικοποίηση, διαφορικά, ακρότατα και σαγματικά σημεία. Τύπος του Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, μετρική, βαθμίδα, απόκλιση, στροβιλισμός. Πολλαπλά ολοκληρώματα, διπλά και τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές και άλλες συντεταγμένες, εφαρμογές σε υπολογισμό εμβαδών, ροπών, κέντρων μάζας, αλλαγές μεταβλητών (Ιακωβιανές ορίζουσες). Ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων, επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα, ανεξαρτησία από τη διαδρομή, συναρτήσεις δυναμικού και συντηρητικά πεδία, θεωρήματα Green, Gauss, Stokes και εφαρμογές.

1 2024-10-08 Tu (Φροντιστήριο)

Για να ορίσουμε μία ευθεία, αρκεί να γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο περνάει κι ένα παράλληλο διάνυσμα. Ορίζεται ως

$$\ell(t) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot v = (x(t), y(t), z(t))$$

Για να ορίσουμε ένα επίπεδο αρκεί να ξέρουμε ένα σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ από το οποίο περνάει και ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Ορίζεται ως

$$P(x, y, z) := A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

1η Ανάλυση II.pdf

- Άσκηση 2 Κάθετο διάνυσμα: $(2, -3, 1)$. Αρκεί να δούμε αν τα διανύσματα $(2, -3, 1), (1, 1, 1)$ είναι κάθετα, δηλαδή αν το εσωτερικό γινόμενο είναι 0, όπου είναι.
- Άσκηση 3 Αρκεί ένα σημείο της ευθείας να επαληθεύει το επίπεδο. Άρα το $\ell(t) = (1 + 2t, -1 + 3t, 2 + t)$ να επαληθεύει την εξίσωση του επιπέδου.
- Άσκηση 4 Αφού δεν είναι παράλληλα, είναι γραμμικά *ανεξάρτητα*. Αφού είναι κάθετα στο $\mathbf{v}$, το εσωτερικό τους γινόμενο με το $\mathbf{v}$ θα πρέπει να είναι 0. Έστω το επίπεδο $P : x + y + z = 0$. Αν $\mathbf{a} = (x, y, z) \in P$, αφού $\mathbf{v} \perp P$, τότε $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ και θα πρέπει $x + y + z = 0 \iff y = -x - z$. Άρα $\mathbf{a} = (x, -x - z, z) = (x, -x, 0) + (0, -z, z)$. Δηλαδή,
$$\mathbf{a} = x(1, -1, 0) + z(0, -1, 1)$$

Πληροφορία

Δηλαδή, $\mathbf{a} \in \text{span}\{(1,-1,0),(0,-1,1)\}$.

Έστω $\mathbf{x} = (1,-1,0)$, $\mathbf{y} = (0,-1,1)$. Παρατηρώ ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, **δεν είναι παράλληλα**. Επίσης, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ και $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 0$. Άρα, τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι τα ζητούμενα διανύσματα.

- Άσκηση 10

  1. Το επίπεδο θα είναι κάθετο στο $(5,0,2)$. Άρα $A = 5, B = 0, C = 2$. Επίσης έχουμε το σημείο $(5,-1,0)$, άρα έχουμε την εξίσωση του επιπέδου. Έπειτα από πράξεις, έχουμε:
  $$P_1 : 5x + 2z - 25 = 0$$
  2. Βρίσκουμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο από το εξωτερικό γινόμενο 2 από των 3 δοθέντων διανυσμάτων. $\mathbf{AB} = (-2,1,2)$, $\mathbf{A} = (3,8,-4)$.
  $$\mathbf{AB} \times \mathbf{A} = \ldots = (-20,-2,-19)$$
  Άρα βρίσκουμε το επίπεδο από το $\mathbf{n} = (-20,-2,-19)$ και το σημείο $(0,0,5)$.

2 2024-10-09 We

2.1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

2.2 Σύνολα στάθμης

Για $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{U}_c = \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

2.3 Τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

- Σφαίρες
- Συνοριακά σημεία: $\mathbf{x} \in \partial A$
- Ανοιχτά σύνολα
- Κλειστά σύνολα: $A = A \cup \partial A = \bar{A}$

2.4 Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$

- ε ορισμός σύγκλισης

3 2024-10-11 Fr

3.1 Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ (συνέχεια)

Παράδειγμα 3.1

Έστω $\mathbf{x}_k = \left(\frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}\right), k \in \mathbb{N}$. N.δ.ο. $\mathbf{x}_k \to (1,1), k \to \infty$.
Πρέπει $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \to 0 \iff \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$. Δηλαδή πρέπει

$$\left\|\left(\frac{k-1}{k},\frac{k+1}{k}\right)-(1,1)\right\|=\left\|\left(\frac{k-1}{k}-1,\frac{k+1}{k}-1\right)\right\|=$$
$$\left\|\left(\frac{-1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\|=\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{k}\to 0$$

το οποίο ισχύει.

Βοήθεια

Το διανυσματικό όριο του $\mathbf{x}$ ισούται το διάνυσμα των βαθμωτών ορίων των $\mathbf{x}_i$.

Π.χ., στο παραπάνω παράδειγμα θα βόλευε περισσότερο να βρούμε τα βαθμωτά όρια ξεχωριστά.

3.2 Όρια διανυσματικών συναρτήσεων

[1, κεφ. 2.2].

- Ορισμός ϵ, δ ορίων [1, θ. 7, σ. 102].

Έχε υπόψιν ότι το δ είναι συνάρτηση του ϵ, μόνο το ϵ είναι αυθαίρετο μέγεθος. Το δ μπορεί να είναι αυθαίρετα *μικρό*, αλλά όταν είναι μεγαλύτερο από κάποια σταθερά $k(\epsilon)$, τότε παύει να ικανοποιείται η ιδιότητα του ορίου.

3.3 Συνέχεια

- Ορισμός συνέχειας [1, σ. 97].

Παράδειγμα 3.2

Έστω $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ και $\vec{f}(x_1,x_2)=(\underbrace{x_1+x_2}_{y_1},\underbrace{x_1-x_2}_{y_2})$.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(1,1)}\vec{f}(x_1,x_2)=(2,0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta(\epsilon)>0\mid\underbrace{\|(x_1,x_2)-(1,1)\|<\delta}_{(A)}\implies\underbrace{\|\vec{f}(x_1,x_2)-(2,0)\|<\epsilon}_{(B)}$$

$$\begin{aligned}
(A) &\iff [(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]^{\frac{1}{2}}<\delta\\
(B) &\iff [(x_1+x_2-2)^2+(x_1-x_2)^2]^{\frac{1}{2}}<\epsilon\\
&\iff [(x_1-1+x_2-1)^2+(x_1-1-(x_2-1))^2]^{\frac{1}{2}}<\epsilon\\
&\iff \ldots\\
&\iff \sqrt{2}\|(x_1-1,x_2-1)\|<\epsilon
\end{aligned}$$

Άρα επιλέγω $\delta=\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$.

4 2024-10-15 Tu (Φροντιστήριο)

- ϵ, δ ορισμός ορίων
- ορισμός συνέχειας στον $\mathbb{R}^n$ [1, θεώρημα 7, σ. 102]

Θεώρημα 4.1: Μοναδικότητα του ορίου

Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, τότε $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

- ιδιότητες συνέχειας στον $\mathbb{R}^n$ [1, θεώρημα 4, σ. 98]

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \implies \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x})| = |b|$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, εκτός από όταν το όριο ισούται με 0.

- *διαδοχικά όρια*:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Εάν υπάρχει το όριο, οι όροι 2,3 θα ισούνται, αλλιώς δεν υπάρχει το όριο.

Παράδειγμα 4.1

> Να δείξετε ότι
>
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

Έστω $\epsilon > 0$ τυχαίο. Επιλέγω $\delta = \epsilon$. $\forall (x,y)$ για το οποίο ισχύει $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \iff |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$. Άρα $|x| = |x-0| < \epsilon$, το $\epsilon > 0$ ήταν τυχαίο άρα ισχύει το όριο.

4.1 Ασκήσεις

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin\frac{1}{y}$

$$0 \le \left|xy\sin\frac{1}{y}\right| = |xy|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \le |xy|$$

  Εφόσον $0 \le \left|\sin\frac{1}{y}\right| \le 1$.

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, άρα το όριο συγκλίνει στο 0.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

  Θέτω $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$.

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Επίσης,

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\frac{\sqrt{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}y^2}+\frac{\cancel{y^2}}{x^2\cancel{y^2}}}} \to 0,$$

καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Άρα, το όριο ισούται με $1 \cdot 0 = 0$.

Περιπτώσεις όπου *δεν* υπάρχει το όριο.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y + x^2 y}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
  - $f(x,0) = 0$
  - $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \ldots = 1$

  Διαφέρουν, άρα το όριο δεν υπάρχει.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{2x^4+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

  Προσεγγίζουμε το $(0,0)$ μέσω των καμπυλών $y = \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι το όριο εξαρτάται από το λ, κι ότι διαφέρουν μεταξύ τους, άρα το όριο δεν υπάρχει.

$$f(x,\lambda x^2) = \frac{\cancel{x^4} - \lambda^2\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}+3\lambda^2\cancel{x^4}} = \frac{1-\lambda^2}{2+3\lambda^2} \implies \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^2) = \frac{1-\lambda^2}{2+3\lambda^2}$$

  Το όριο εξαρτάται από το λ, άρα δεν υπάρχει.

Βοήθεια

Όποτε βλέπεις ημίτονο/συνημίτονο, προσπάθησε πρώτα με ανισότητες.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2}$$

Συμβουλή

Γενικά, ισχύει ότι:

$$|\sin u| \le |u|$$

Βγαίνει εύκολα ότι $\frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} \le |x|+|y|$. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|+|y| = 0$. Άρα και το ενδιάμεσο *απόλυτο* κλάσμα κάνει 0, οπότε (όπως είπαμε πιο πάνω) και το αρχικό όριο κάνει 0.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y}{x+y}$

  Θέτω $u = x + y$, άρα $u \to 0$ καθώς $(x, y) \to (0, 0)$. Οπότε,

  $$\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1 - u}{u} = 0,$$

  από DLH.

- $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$, $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$. α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda > 0, \lambda \neq 1$, το $\lim_{x\to 0} f(x, x^\lambda)$ υπάρχει. β) Ν.δ.ο. το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

  1. $f(x, x^\lambda) = \frac{xx^\lambda}{x-x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+1}}{x-x^\lambda}$.

     – Αν $\lambda > 1$: $f(x, x^\lambda) = \cdots = \frac{x^\lambda}{1-x^{\lambda-1}} \to 0, x \to 0$.
     – Αν $0 < \lambda < 1$: $f(x, x^\lambda) = \cdots = \frac{x}{x^{1-\lambda}-1} \to 0, x \to 0$.

     Άρα το όριο είναι ανεξάρτητο του λ κι υπάρχει, καθώς ισούται με 0.

  2. Έστω $y = \mu x$. Τότε, $f(x, \mu x) = \frac{\mu x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1-\mu)} \to 0$.

  ☐ Να δω καταγραφή

5 2024-10-16 We

- Απόδειξη τρίτης ιδιότητας από [1, θεώρημα 3, σ. 95] Θέτω $\delta = \min(b_1, b_2)$
- Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων [1, θεώρημα 5, σ. 99]

Θεώρημα 5.1: Όριο ακολουθίας

Έστω $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A ανοικτό, $\mathbf{x} \in \bar{A}$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \iff \forall(\mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \implies \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$$

5.1 Παραδείγματα συνέχειας

1. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, για $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   - **1ος τρόπος**: Έχουμε $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Άρα:

     $$0 \leq f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\| \to 0$$

   - **2ος τρόπος (μέσω ορισμού)**:

     $$\forall\epsilon > 0 \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies |f(x, y) - 0| < \epsilon$$

     Από τον πρώτο τρόπο δείξαμε ότι η $f(x, y)$ φράζεται από την νόρμα $\|(x, y)\|$, άρα αρκεί να πάρουμε $\delta = \epsilon$.

2. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, για $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

$$0 \le |f(x,y) - 0| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3| + |y^3|}{x^2+y^2} = \frac{x^2|x| + y^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(|x|+|y|)}{\cancel{x^2+y^2}} = |x| + |y| \to 0,$$

καθώς $\|(x,y)\| \to 0$.

3. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, για $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

$$|f(x,y)| = \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{2x^2|y|}{x^2} = 2|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\|(x,y) - (0,0)\| \to 0$$

6 2024-10-18 Fr

- 2η ώρα, 14:32

6.1 Παραγώγιση

[1, εν. 2.3, 2, σ. 24]

- Κατά-κατεύθυνση παράγωγοι
  - Ορισμός [2, σ. 25]

7 2024-10-22 Tu (Φροντιστήριο)

Ασκήσεις πάνω σε όρια, διαδοχικά όρια, συνέχεια.

7.1 Άσκηση 1

> $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
>
> Να εξεταστεί η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως προς τη συνέχεια.

Παρατηρούμε ότι η f για $(x,y) \neq (0,0)$ είναι συνεχής και στους δύο κλάδους της. Άρα αρκεί να εξετάσουμε τη συνέχεια στο $(x,y) = (0,0)$. Έχω ότι:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \ldots$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \to \frac{1}{\sqrt{1}+1} \to \frac{1}{2}$$

Άρα η $f(x,y)$: συνεχής στο $(0,0)$, άρα f : συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

7.2 Άσκηση 2

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ν.δ.ο. υπάρχουν τα διαδοχικά όρια κι ότι είναι ίσα, αλλά το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **δεν** υπάρχει.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

Βοήθεια

Για να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ένα κεντρικό όριο, παίρνουμε δύο διαφορετικές ευθείες/καμπύλες που περνάνε από το σημείο και βρίσκουμε ότι φέρνουν διαφορετικό αποτέλεσμα.

Παρατηρώ ότι για $y = 0$, $f(x,0) = 0$ κι άρα $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. Αν $y = x$ τότε $f(x,x) = \cdots = \frac{1}{2}$. Άρα λόγω της μοναδικότητας του ορίου, το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **δεν** υπάρχει.

7.3 Άσκηση 3

Να βρεθούν τα διαδοχικά όρια καθώς και το όριο για $(x,y) \to (0,0)$ των συναρτήσεων

1. $\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$
2. $\frac{\sin xy}{x}$

1.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1+x = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2+y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y-1 = -1$$

Άρα το κεντρικό όριο *δεν* υπάρχει.

2.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{xy}y = \lim_{y\to 0} y \lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{xy} = 0\cdot 1 = 0$$

$$=$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\sin xy}{x} = \cdots = 0$$

Για το κεντρικό όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 0\cdot 1 = 0$$

7.4 Άσκηση 4

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια για $(x,y)\to(0,0)$:

1. $f(x,y,z) = \frac{2x^2+3yz}{x^2+y^2+z^2}$
2. $g(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

1. Θα δείξω ότι το όριο **δεν** υπάρχει. Θεωρώ ότι $(x,y,z)\to(0,0,0)$ κατά μήκος μίας ευθείας $\epsilon \parallel \mathbf{n} = (\kappa,\lambda,\mu)$, που προφανώς περνάει από το $\mathbf{0}$. Η ευθεία θα έχει την μορφή

$$(x(t),y(t),z(t)) = t(\kappa,\lambda,\mu)+(0,0,0) = (\kappa t,\lambda t,\mu t) \implies \begin{cases} x = \kappa t \\ y = \lambda t \\ z = \mu t \end{cases}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) &= \lim_{t\to 0} f(\kappa t,\lambda t,\mu t) = \lim_{t\to 0}\frac{2(\kappa t)^2+3\lambda t\mu t}{(\kappa t)^2+(\lambda t)^2+(\mu t)^2}\\ &= \cdots = \lim_{t\to 0}\frac{2\kappa^2+3\lambda\mu}{\kappa^2+\lambda^2+\mu^2} = \frac{2\kappa^2+3\lambda\mu}{\kappa^2+\lambda^2+\mu^2}\end{aligned}$$

Άρα το όριο εξαρτάται από την ευθεία προσέγγισης ϵ κι όχι από το t. Άρα το όριο δεν υπάρχει.

2.
$$0 \le |g(x,y,z)| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|xy||z|}{x^2+y^2+z^2}$$

Έχουμε επίσης,

$$x^2+y^2 \le x^2+y^2+z^2, |x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2, (x+y)^2 \ge 0 \iff x^2+y^2 \ge -2xy, (x-y)^2 \ge 0 \iff x^2+y^2 \ge 2xy$$

Από τα παραπάνω βγαίνει:

$$x^2+y^2 \ge 2|xy| \implies x^2+y^2+z^2 \ge 2|xy|$$

Άρα

$$\underbrace{\frac{|z|}{2}}_{z\to 0 \implies \to 0} \ge \frac{|xy||z|}{x^2+y^2+z^2} \ge 0$$

Οπότε $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0$.

7.5 Μερικές παράγωγοι

- Ορισμός [1, σ. 106].

Παράδειγμα 7.1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Αν προσεγγίσω το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$, δηλαδή της ευθείας $y=0$. Τότε $f(x,0)=0$, ενώ αν προσεγγίσω κατά μήκος της $y=x$ θα έχω $f(x,x)=\cdots=\frac{1}{2}$. Άρα το όριο δεν υπάρχει, κι άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.
Όμως, οι μερικές παράγωγοι *υπάρχουν*.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Άρα, το ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι δεν μας δείχνει τίποτα για τη συνέχεια της συνάρτησης.

7.5.1 Άσκηση 5

> Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς όλες τις μεταβλητές των συναρτήσεων:
> 1. $f(x,y) = \cos xy + x\cos y$
> 2. $F(x,y,z) = (2x^2y^2 - z^2, xe^y - \cos z, xyz)$

1.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin xy + \cos y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin xy - x\sin y$$

2.
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = (4xy^2, e^y, yz)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = (4x^2y, xe^y, xz)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = (-2z, \sin z, xy)$$

8 2024-10-23 We

- μερικές παράγωγοι για βαθμωτές και διανυσματικές συναρτήσεις.
- κατά κατεύθυνση παράγωγοι.
  - Συνήθως το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Παράδειγμα 8.1

> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (1, 2)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = 2$. Βρείτε το $\mathbf{u}^*$ με $\|\mathbf{u}^*\| = 1$ έτσι ώστε η $D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x})$ να μεγιστοποιείται.

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}^*) - f(\mathbf{x})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(1,2) + h(u_1^*, u_2^*) - f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + hu_1^*, 2 + hu_2^*) - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + hu_1^*)(2 + hu_2^*) - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + (2u_1^* + u_2^*)h + h^2 u_1^* u_2^* - \cancel{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2u_1^* + u_2^* + hu_1^* u_2^*) = 2u_1^* + u_2^*
\end{aligned}
$$

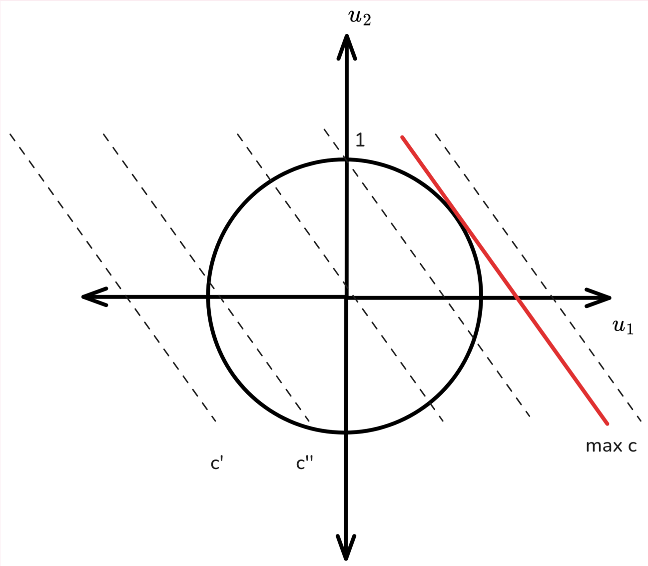
Σημείωση

Για επαλήθευση, αν $u_1^* = \frac{3}{5}, u_2^* = \frac{4}{5}$: $D_{\mathbf{u}^*} f(\mathbf{x}) = 2$.

Άρα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τη $g(u_1, u_2) = 2u_1 + u_2$, υπό τον περιορισμό $u_1^2 + u_2^1 = 1$.

8.0.1 Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω καμπύλες στάθμης $g(u_1, u_2) = 2u_1 + u_2 = c \implies u_2 = c - 2u_1$. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη σταθερά c, κρατώντας τον περιορισμό ότι $u_1^2 + u_2^1 = 1$, δηλαδή τα u_1, u_2 να βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης, μπορούμε να εκφράσουμε τη μεταβλητή u_2 συναρτήσει των c, u_1 όπου θα είναι μια ευθεία με κλίση -2.
Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το c, άρα κινούμαστε προς τα δεξιά. Θέλουμε επίσης το c να είναι πάνω στον κύκλο. Άρα θέλουμε το c που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη.



Άρα με αντικατάσταση για το u_2,

$$u_1^2 + (c - 2u_1)^2 = 1 \iff \cdots \iff 5u_1^2 - 4cu_1 + c^2 - 1 = 0$$

Για διπλή ρίζα, πρέπει η διακρίνουσα να είναι 0. Άρα, $\Delta = 16c^2 - 4 \cdot 5(c^2 - 1) = 0 \implies c = \sqrt{5}$.
Οπότε, για $c = \sqrt{5}$:

$$5u_1^2 - 4\sqrt{5}u_1 + \sqrt{5}^2 - 1 = 0 \implies (\sqrt{5}u_1 - 2)^2 = 0 \implies u_1 = u_1^* = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

και

$$u_2 = u_2^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Άρα $\mathbf{u}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Σημείωση

Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στάθμης $x_2 = \frac{2}{x_1}$ στο $(1, 2)$ είναι

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{-2}{x_1^2}\right|_{x_1=1} = -2$$

Άρα ένα διάνυσμα $\mathbf{p} \parallel$ εφαπτομένη είναι το $(1, -2)$. Έχουμε ότι $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p} = 0$. Άρα το $\mathbf{u}^*$ είναι κάθετο στην καπύλη της εφαπτομένης. Αυτό αργότερα θα το συναντήσουμε ως $\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x})$.

9 2024-10-25 Fr

9.1 Παράγωγοι

[3, σ. 72].

Σημείωση

Η $g(x)$ είναι *αφφινική* ως προς x, δηλαδή γραμμική ως προς x συν μια σταθερά. Το γράφημά της είναι ευθεία, αλλά *δεν περνάει από το 0.*

Ιδιότητες $g(x)$:

1. Αφφινική με $g(x_0) = f(x_0)$
2. Το γράφημα της g προσεγγίζει το γράφημα της f, υπό την έννοια ότι το $\lim_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = 0$ – ακόμα κι αν διαιρέσουμε με $x - x_0$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι πιο γρήγορη από γραμμική.

Με αυτήν την αφφινική συνάρτηση $g(x)$ επεκτείνουμε τον ορισμό και σε n διαστάσεις.

Προσωρινός και αυστηρός/κανονικός/απλοποιημένος ορισμός παραγωγισιμότητας [3, σσ. 74–75].

Παράδειγμα 9.1

Υπολογίστε τη $D\mathbf{f}(x, y)$ όπου

1. $$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + y \\ y^2 x \end{bmatrix}$$
2. $$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + \cos y \\ ye^x \\ xy \end{bmatrix}$$

1. $$D\mathbf{f} = (x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$
2. $$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ ye^x & e^x \\ y & x \end{bmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγωγισιμότητας [3, σσ. 75–80].

10 2024-10-29 Tu (Φροντιστήριο)

10.1 Άσκηση

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι (αν υπάρχουν) της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$, επειδή έχουμε ρητή συνάρτηση, οι μερικοί παράγωγοι υπάρχουν και είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x^2y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3y + 4xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots = \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Για το $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

όμοια,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Σημείωση

Αν f διαφορίσιμη, τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο x ως προς u θα είναι

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{u}$$

10.2 Άσκηση

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x,y) = x^2 + 2xy$ στη θέση $A := (1,-2)$ κατά κατεύθυνση $\eta = (3,4)$.

$\|\eta\| = \sqrt{25} = 5$, άρα $\hat{\eta} = \frac{\eta}{\|\eta\|} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x \implies \nabla f(x,y) = (2x+2y, 2x)$. $\nabla f(1,-2) = (2-4,2) = (-2,2)$.

Άρα, $D_\eta f\big|_A = \nabla f(1,-2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (-2,2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$.

10.3 Άσκηση

> Έστω $f(x, y, z) = y^2 - z^2 - x^2$ και $A := (2, 1, -3)$. Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο A μεγιστοποιείται. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.

Σημείωση

Θα μας βοηθήσει η σχέση $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων.

Γενικά, μια κατεύθυνση ορίζεται από ένα *μοναδιαίο* διάνυσμα. Έστω $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Τότε, η παράγωγος της f στο A στη κατεύθυνση του $\hat{\eta}$ θα είναι $D_{\hat{\eta}} f\big|_A = \nabla f|_A \cdot \hat{\eta}$.

$$ } ⟹

∇f(x,y,z) = (-2x,2y,-2z) ⊠ ∇f(2,1,-3) = (-4,2,6) $$

Έχουμε $\|\nabla f(2, 1, -3)\| = \sqrt{56}$ και $\|\hat{\eta}\| = 1$ ως μοναδιαίο διάνυσμα. Άρα,

$$D_\eta f\big|_A = \nabla f|_A \cdot \hat{\eta} = \|\nabla f|_A\| \cdot \|\hat{\eta}\| \cdot \cos\theta = \sqrt{56} \cdot 1 \cdot \cos\theta$$

Όμως, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Άρα, το κατά πόσο είναι μέγιστο εξαρτάται από τη τιμή του θ, δηλαδή θα πρέπει $\cos\theta = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι πρέπει $\nabla f \parallel \eta$ και να είναι και *ομόρροπα*. Επειδή $\hat{\eta}$ μοναδιαίο,

$$\hat{\eta} = \frac{\nabla f|_A}{\|\nabla f|_A\|}$$

10.4 Θεωρία παραγωγισιμότητας/διαφορισιμότητας

- Ορισμός παραγωγισιμότητας
- Αν $n, m \geq 2$, τότε η παράγωγος $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ θα είναι πίνακας και θα ονομάζεται πίνακας *Jacobian* (*Ιακωβιανός* πίνακας) της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 10.1

Αν η $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε θα είναι *συνεχής* στο $\mathbf{x}_0$.

Θεώρημα 10.2

$\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς, τότε η $\mathbf{f}$ θα είναι παραγωγίσιμη.

Σημείωση

Δεν ισχύει το αντίστροφο!

10.4.1 Μεθοδολογία

Θέλουμε να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Τότε,

1. Ελέγχουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο $\mathbf{x}_0$.
2. Ελέγχουμε τη συνέχεια της f στο $\mathbf{x}_0$.
3. Θεωρούμε το όριο

$$\ell = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

Αν $\ell = 0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

10.5 Άσκηση

Να εξεταστεί η διαφορισιμότητα της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \end{cases}$$

Για $(x,y)\neq(0,0)$, η f παραγωγίζεται ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ελέγχουμε πρώτα τη μερική παράγωγο ως προς x.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 2$$

Υπάρχει. Τώρα, για y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^3}$$

Βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος δεν υπάρχει (τα πλευρικά όρια – $-\infty, +\infty$ – δεν είναι ίσα).

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

10.6 Άσκηση

Να εξεταστεί η διαφορισιμότητα της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \end{cases}$$

στο σημείο $(x,y)=(0,0)$.

Οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν κι είναι ίσες (0).

Για να είναι η f συνεχής στο $(0,0)$, θα πρέπει $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Αν προσεγγίσω το $(0,0)$ από τον άξονα $x'x$, θα έχω $f(x,0)=0$. Όμοια, αν προσεγγίσω κατά μήκος της $y=x$, θα έχω $f(x,x)=\cdots=\frac{1}{2}$. Άρα το όριο δεν υπάρχει, δηλαδή δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ κι άρα όχι παραγωγίσιμη.

10.7 Άσκηση

Να εξεταστεί η διαφορισιμότητα της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \end{cases}$$

στο σημείο $(x,y) = (0,0)$.

Οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν κι είναι ίσες (0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cdots = 0 = f(0,0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Μελετάμε το όριο

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right\|}{\|(x,y)-(0,0)\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

το οποίο δεν υπάρχει (βλ. προηγούμενη άσκηση).

11 2024-10-30 We

- Επανάληψη γεωμετρικής ερμηνείας παραγώγου.

Εάν ο ορισμός παραγωγισιμότητας που δεν υποθέτει κάτι για τις μερικές παραγώγους ή τον T ικανοποιείται, τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι *αλλά κι όλες* οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι.

Η **παραγωγισιμότητα** είναι *πιο ισχυρή* έννοια από τη **συνέχεια**.

- Ιδιότητες παραγώγου [3, σ. 89].
- Κανόνας αλυσίδας [3, σ. 91].

12 2024-11-01 Fr

12.0.1 Κανόνας αλυσίδας

Χαλικιάς [3], σσ. 91-101.

12.1 Κλίση (Gradient)

Χαλικιάς [3], σσ. 103-105.

Αν θέλω να μεγιστοποιήσω τον ρυθμό μεταβολής της f κατά μία οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$, τότε αρκεί να ορίσω τη κατεύθυνση $\mathbf{u}$ ως $\nabla f(\mathbf{x})$ και θα έχω μέγιστο ρυθμό μεταβολής ίσο με $\|\nabla f(x)\|$ [3, σ. 104].

13 2024-11-05 Tu (Φροντιστήριο)

13.1 Άσκηση

> Έστω $w = f(u, v)$. Αν $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$, να βρεθούν w_x, w_y, w_z ως συναρτήσεις των w_u, w_v.

Η συνάρτηση είναι σύνθετη. Άρα,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} =& \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) \\
=& w_u \frac{\partial u}{\partial x} + w_v \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

Όμοια,

$$

$\frac{\partial w}{\partial z} = w_u \frac{\partial u}{\partial z} + w_v \frac{\partial v}{\partial z}$

$$

13.2 Άσκηση

> $f(w) = we^{-w} \cos w, w = x^2 + y^2$. Βρείτε τα f_x, f_y.

$$\begin{aligned}
f_x =& \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
=& \left[e^{-w} \cos w - we^{-w} \cos w - we^{-w} \sin w\right] \cdot 2x \\
=& \Big[e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2) \\
& - (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2 + y^2)\Big] \cdot 2x \\
=& \ldots
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για f_y με $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

13.3 Άσκηση

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ uv \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ x^2 \\ x+y \end{bmatrix}$$

και $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Να βρεθούν οι $\frac{\partial h_1}{\partial u}, \frac{\partial h_3}{\partial v}, Dh$.

$$\mathbf{h}(u,v) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(u,v)) = \mathbf{g}(u+v, uv) = \big[\, \underbrace{(u+v)^2 + u^2v^2}_{h_1}, \underbrace{(u+v)^3}_{h_2}, \underbrace{u+v+uv}_{h_3} \big]$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = 2(u+v) + 2uv^2$$
$$\frac{\partial h_3}{\partial v} = 1 + u$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \implies Dh \in \mathbb{R}^{3\times2}$. Όμοια, $Df \in \mathbb{R}^{2\times2}, Dg \in \mathbb{R}^{3\times2}$.

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$$

$$Dg = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης,

$$D(g \circ f)(u,v) = Dg(f(u,v)) \cdot Df(u,v)$$

Άρα θα έχουμε

$$Dg(f(u,v)) = \begin{bmatrix} 2(u+v) & 2uv \\ 3(u+v)^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$Dh(u,v) = \begin{bmatrix} 2(u+v) & 2uv \\ 3(u+v)^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(u+v) + 2uv^2 & 2(u+v) + 2u^2v \\ 3(u+v)^2 & 3(u+v)^2 \\ 1+v & 1+u \end{bmatrix}$$

13.4 Άσκηση

$z = f(x, y), x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$. N.δ.ο. $z_x^2 + z_y^2 = e^{-2u}(z_u^2 + z_v^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z_u = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = z_v = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v, \ \frac{\partial x}{\partial v} = -e^u \sin v$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^u \sin v, \ \frac{\partial y}{\partial v} = e^u \cos v$$

Άρα,

$$z_u = z_x e^u \cos v + z_y e^u \sin v$$
$$z_v = -z_x e^u \sin v + z_y e^u \cos v$$

οπότε

$$z_u^2 = e^{2u}(z_x^2 \cos^2 v + 2 z_x z_v \cos v \sin v + z_y^2 \sin^2 v)$$
$$z_v^2 = e^{2u}(z_x^2 \sin^2 v - 2 z_x z_y \cos v \sin v + z_y^2 \cos^2 v)$$

και κάνοντας πράξεις βγαίνει η αρχική ισότητα.

13.5 Άσκηση

Marsden και Tromba [1], ασκ. 22, εν. 2.5, σ. 132.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

N.δ.ο.:

1. Οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο $(0, 0)$.
2. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.
3. Αν $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ για σταθερές a, b, τότε η $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη και $(f \circ g)'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$, αλλά $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

Συμβουλή

Η άσκηση λειτουργεί ως παράδειγμα στο εξής: Μπορεί να υπάρχει η παράγωγος της σύνθεσης, αλλά επειδή μία από τις συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμη, να μην ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

2. Εξετάζουμε το παρακάτω όριο:

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y) - \cancelto{0}{f(0,0)} - \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}(x-0) - \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}(y-0)\right|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Έστω $y = x$. Τότε,

$$\lim_{x\to 0} \frac{xx^2}{(x^2+x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x^2)^{3/2}\cdot 2^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x^3|\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$

όμως για $y = 0$, το όριο $\to 0$. Άρα το όριο δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.

14 2024-11-06 We

14.1 Κλίση (Gradient)

Χαλικιάς [3], σ. 103.

> Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι μέγιστος κατά την διεύθυνση του διανύσματος κλίσης $\nabla f(x)$.

- Θεώρημα σ. 105.
- Κλίση σε πολικές συντεταγμένες.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$$

14.2 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Χαλικιάς [3], σ. 110.

Γενικά, ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \iff f_{xy} = f_{yx}$$

14.3 Θεώρημα Taylor

Χαλικιάς [3], σ. 115.

- Ανάπτυγμα 1ης τάξης
- Παράδειγμα όγκου κυλίνδρου

15 2024-11-08 Fr

15.1 Ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης

Χαλικιάς [3], σ. 122.

Εσσιανός (Hessian) πίνακας:

$$H(\mathbf{x}_0) = H^T(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι *συμμετρικός*, καθώς οι μεικτές παράγωγοι ίδιων μεταβλητών είναι ίσες ανεξάρτητα της σειράς.

- παράδειγμα σ. 127.

15.2 Ακρότατα συναρτήσεων

Χαλικιάς [3], σ. 128.

- Κριτήριο 1ης παραγώγου (σ. 129).
- Παραδείγματα σσ. 130-133.

16 2024-11-12 Tu (Φροντιστήριο)

16.1 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

16.1.1 Άσκηση

> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x \sin(xy)$. Να βρείτε τα f_{yx}, f_{xy}.

$$f_x = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$
$$f_y = x^2 \cos(xy)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial(\sin(xy) + xy\cos(xy))}{\partial y} = x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy) + x\cos(xy)$$
$$= 2x\cos(xy) - -x^2 y\sin(xy) = f_{yx}$$

16.1.2 Άσκηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $f_{xy} \neq f_{yx}$.

$$\begin{aligned} f_x &= y\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + xy\left[\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\right] \\ &= y\frac{(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{2x2y^2}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

καθώς για $(x,y) \neq (0,0)$, $f_x \to 0$. Όμοια,

$$f_y = \begin{cases} \frac{-x}{(x^2+y^2)^2}(y^4+4x^2y^2-x^4), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \end{cases}$$

Με ανισότητες, εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $(0,0)$. Έχουμε:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot x^4}{x^4}}{x} = 1$$

Όμοια,

$$f_{xy}(0,0) = \cdots = -1$$

Άρα $f_{xy} \neq f_{yx}$.

16.1.3 Άσκηση

Ν.δ.ο. $f(x,y,z) = e^{5x}\sin(3y)\cos(4z)$ είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (Μ.Δ.Ε.) του Laplace $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 5e^{5x}\sin(3y)\cos(4z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 25e^{5x}\sin(3y)\cos(4z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{5x}\cos(3y)\cos(4z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9e^{5x}\sin(3y)\cos(4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4e^{5x}\sin(3y)\cos(4z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -16e^{5x}\sin(3y)\sin(4z)$$

$$\Delta f = \cdots = 0$$

16.1.4 Άσκηση

Μέγιστο-Ελάχιστο

Προσοχή

SOS
Σίγουρο να μπει τέτοιου τύπου άσκηση στις εξετάσεις.

Σημείωση

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται βρίσκονται στο επόμενο μάθημα.

- Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα [3, σ. 138].
- Κριτήριο 2ης παραγώγου για συναρτήσεις 2 μεταβλητών [3, σ. 142].

Συμβουλή

Μεθοδολογία
1. Εξετάζουμε εάν η συνάρτηση είναι C^2.
2. Βρίσκουμε μερικές παραγώγους και πού μηδενίζονται.
3. Βρίσκουμε τις παραγώγους 2ης τάξης για να φτιάξουμε τον Εσσιανό πίνακα.
4. Υπολογίζουμε την ορίζουσα.

> $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$. Να βρείτε τυχόν μέγιστο/ελάχιστο.

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x + y & -2y + x \end{bmatrix}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε πού μηδενίζεται.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{matrix} 2x + y = 0 \implies 4y + y = 0 \implies y = 0 \\ -2y + x = 0 \implies x = 2y \implies x = 0 \end{matrix}$$

Άρα το $(0,0)$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο. Τώρα,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

Φτιάχνουμε την Εσσιανή:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = Hf(0,0)$$

$$D = \det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 < 0$$

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

16.1.5 Άσκηση

Δεληγιάννη 2021-2022, 7.1

> $f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$

Ως πολυωνυμική είναι C^∞, άρα C^2.

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2xy & x^2 - 2y - 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{aligned} 3x^2 + 2xy = 0 &\implies x(3x+2y) = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 & \end{aligned}$$

Άρα είτε $x = 0$ είτε $x = -\frac{2}{3}y$.

1. Αν $x = 0 \implies 0^2 - 2y - 4 = 0 \iff y = -2$. Άρα το $(0,-2)$ είναι κρίσιμο σημείο.
2. Αν $x = -\frac{2}{3}y \implies \frac{4}{9}y^2 - 2y - 4 = 0 \iff 2y^2 - 9y - 18 = 0$.
   - $\Delta = 81 + 8 \cdot 18 = 225 = 15^2$, άρα $y_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{4} \implies y_1 = 6, y_2 = -\frac{3}{2}$. Οπότε $x_1 = -\frac{2}{3}6 = 4, x_2 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$.

Άρα όλα τα κρίσιμα σημεία είναι: $(0,-2), (-4,6), \left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix}$$

- $(0,-2)$:

  $$Hf(0,-2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  $$D_1 = \det Hf(0,-2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

  Άρα τοπικό μέγιστο.

- $(-4, 6)$:

$$Hf(-4,6) = \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \det Hf(-4,6) = \begin{vmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 64 < 0$$

Άρα σαγματικό σημείο.

- $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$:

$$Hf\left(1, -\frac{3}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \det Hf\left(1, -\frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 < 0$$

Άρα σαγματικό σημείο.

17 2024-11-13 We

17.1 Θετικά ορισμένοι πίνακες

Χαλικιάς [3], σσ. 134-137, μόνο λήμματα.

$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$. Συμβολίζεται ως $H \succ 0$. Αντίστοιχα, ένας αρνητικά ορισμένος πίνακας συμβολίζεται ως $H \prec 0$.

Πρέπει ο πίνακας H να είναι *συμμετρικός* — $H_{ij} = H_{ji}$. Γενικά θα θεωρούμε ότι είναι. Επίσης, βάσει θεωρήματος, ο Εσσιανός πίνακας μιας συνάρτησης f είναι πάντοτε συμμετρικός εφόσον $f \in C^2$.

Παράδειγμα 17.1

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0,$$

γιατί

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2y^2 > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Παράδειγμα 17.2

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

γιατί

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix} \\ &= 2x^2 + yx + yx + 2y^2 = 2(x^2 + yx + y^2) \\ &= 2\left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 17.3

Ο πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι *ούτε* θετικά *ούτε* αρνητικά ορισμένος ($\mathbf{x}^T H \mathbf{x} = x^2 - y^2$).

17.2 Ακρότατα

- Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα [3, σ. 138].

Εάν $f \in C^2$, τότε

1. $Hf(\mathbf{x}_0) \succ 0 \implies \mathbf{x}_0$ τοπικό ελάχιστο.
2. $Hf(\mathbf{x}_0) \prec 0 \implies \mathbf{x}_0$ τοπικό μέγιστο.

- Κριτήριο 2ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα σε συναρτήσεις 2 μεταβλητών [3, σ. 142] και παραδείγματα [3, σσ. 143–145].

18 2024-11-19 Tu (Φροντιστήριο)

Θεώρημα 18.1: Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών

Έστω $F : \Omega \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, C^2$. Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ κρίσιμο σημείο. Ορίζω

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta_2(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det Hf(x_0, y_0, z_0)$$

- Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$, τότε (x_0, y_0, z_0) τοπικό ελάχιστο.
- Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$, τότε (x_0, y_0, z_0) τοπικό μέγιστο.
- Αν στην Δ_3 τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου έχουν διαφορετικό πρόσημο, τότε σαγματικό σημείο.
- Αλλιώς, πάμε με ορισμό.

18.1 Άσκηση

1. $f(x, y) = e^{xy}$
2. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2xy$

1. $\nabla f(x,y) = [ye^{xy} \quad xe^{xy}]$. Μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

Άρα,

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2e^{xy} \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα -1. Άρα $(0,0)$ σαγματικό σημείο.

2. Λύνουμε την $\nabla f(x,y) = \left[-\frac{1}{x^2} + 2y \quad -\frac{1}{y^2} + 2x\right] = (0,0)$.

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{1}{x^2} \\ 2x &= \frac{1}{y^2} \end{aligned} \implies \begin{aligned} 2x^2y = 1 \\ 2y^2x = 1 \end{aligned} \implies 2x^2y = 2xy^2 \iff 2x^2y - 2xy^2 = 0$$
$$\iff 2xy(x-y) = 0 \iff x = y$$

Άρα, $2x^3 = 1 \iff x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = y$. Άρα το $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ μοναδικό κρίσιμο σημείο.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$$

Άρα η Εσσιανή θα είναι

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

$$Hf\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \det Hf\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 16 - 4 = 12 > 0$$

Άρα τοπικό ελάχιστο.

18.2 Άσκηση

> $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y & 2y - 2x \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \implies \begin{matrix} 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{matrix} \implies x = y$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι η ευθεία $y = x$, δηλαδή τα (x, x).

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \det Hf(x, x) = 0$$

Παρατηρώ ότι $f(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$. Κατά μήκος της ευθείας $y = x$ έχω ότι $f(x, y) = 0$, ενώ για $y \neq x$, $f(x, y) > 0$:

$$f(x, y) > f(x, x)$$

Άρα ισχύει ότι $f(x, y) \geq f(x, x)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Άρα έχω τοπικό ελάχιστο.

18.3 Άσκηση

> $f(x, y, z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2$. Ταξινομήστε τα κρίσιμα σημεία.

Η f είναι C^2 ως πολυωνυμική.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 9 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Άρα,

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3 & 3y^2 + 9 & 2z \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \implies \begin{matrix} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 9 = 0 \\ 2z = 0 \end{matrix} \implies x = \pm 1, y = \pm\sqrt{3}, z = 0$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής: $(1, \sqrt{3}, 0), (1, -\sqrt{3}, 0), (-1, \sqrt{3}, 0), (-1, -\sqrt{3}, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

Όλες οι υπόλοιπες είναι 0.

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & -6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφόσον ο πίνακας είναι διαγώνιος, οι ιδιοτιμές του είναι οι διαγώνιες τιμές του.

$$Hf(1,\sqrt{3},0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Αφού έχω και θετικές κι αρνητικές ιδιοτιμές, έχω σάγμα στο $(1,\sqrt{3},0)$.

$$Hf(1,-\sqrt{3},0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Όμοια, αφού οι ιδιοτιμές είναι όλες θετικές, έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Όμοια έχουμε σάγμα στα υπόλοιπα κρίσιμα σημεία.

18.4 Άσκηση

> $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

C^2 ως πολυωνυμική.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

Τα κρίσιμα σημεία βρίσκονται από

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \implies x = y = z = 0$$

Άρα μοναδικό το $(0,0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

κι οι υπόλοιπες είναι 0.

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα σάγμα.

18.5 Άσκηση

Δεληγιάννη 2020-2021, 7.5

> $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.
> 1. Να δείξετε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία που περνάει από το $(0, 0)$, έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.
> 2. Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f, αλλά όχι τοπικό ελάχιστο αυτής.

1. Έστω ότι έχω την ευθεία $y = ax, a \in \mathbb{R}$. Άρα $f(x, ax) = g(x) = \cdots = 2x^4 - 3ax^3 + a^2x^2$.

$$g'(x) = 8x^3 - 9ax^2 + 2a^2x = x(8x^2 - 9ax + 2a^2)$$

$$g'(x) = 0 \iff \boxed{x = 0} / 8x^2 - 9ax + 2a^2 = 0$$

Εφόσον $y = ax$, για να περνάει η $g(x)$ από το $(0, 0)$, πρέπει $x = 0$. Οπότε το κρίσιμο σημείο είναι για $x = 0$.

$$g''(x) = 24x^2 - 18ax + 2a^2$$
$$g''(0) = 2a^2 > 0$$

Άρα πράγματι θα έχω τοπικό ελάχιστο.

2.
$$f(x, y) = \cdots = 2x^4 - 3x^2y + y^2$$

με $f \in C^2$ ως πολυωνυμική.

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 8x^3 - 6xy & 2y - 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \implies \begin{matrix} 8x^3 - 6xy = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{matrix} \implies x = y = 0$$

Άρα $(0, 0)$ πράγματι κρίσιμο σημείο.

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, άρα δεν βγάζω συμπέρασμα από το θεώρημα.

Σημείωση

Δες φυλλάδιο για συνέχεια.

19 2024-11-22 Fr

19.1 Διπλά ολοκληρώματα

$$S = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy$$

- Ασυνέχεια
- θεώρημα Fubini κι επέκταση
- y-απλά και x-απλά χωρία
- Ολοκλήρωση σε D y/x-απλό χωρίο Η ολοκλήρωση γίνεται δυνατή από την επέκταση Fubini, καθώς η f^* είναι συνεχής σε όλο το R εκτός από τις δύο καμπύλες $\phi_{1,2}(x)$ ή $\psi_{1,2}(y)$ που είναι όμως γραφήματα συνεχών συναρτήσεων.
  - Αν D x-απλό:
  $$\iint_D f(x,y)dA = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$
  - Αν D y-απλό:
  $$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

20 2024-11-24 Su

20.1 Τριπλά ολοκληρώματα

$$\iiint_B f\,dxdydz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

- Εξακολουθεί να ισχύει το θεώρημα Fubini
- Στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ Μία μεταβλητή βρίσκεται ανάμεσα σε συναρτήσεις των άλλων δύο μεταβλητών, π.χ.:
  $$\begin{aligned}\hat{D} &= \{(x,y,z) \,:\, (x,y) \in D, \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) \,:\, -1 \le x \le 1, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}\end{aligned}$$
  - Κοινό παράδειγμα η μοναδιαία σφαίρα
- $$\int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

20.2 Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση

Μετασχηματισμός T των μεταβλητών από το D^* στο D.

Σημείωση

Η Ιακωβιανή ορίζουσα σε μετασχηματισμό πολικών σε καρτεσιανές μεταβλητές ισούται πάντα με r.
Άρα,
$$dA = dxdy \to rdrd\theta$$

21 2024-11-26 Tu (Φροντιστήριο)

- Πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες [3, σ. 187]
- Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες [3, σ. 189]

Τακτικές επίλυσης ολοκληρωμάτων:

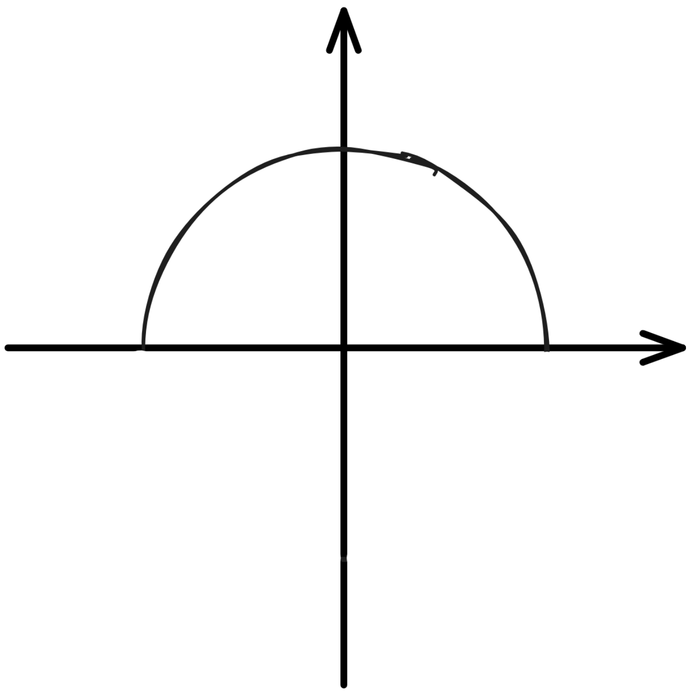
3. Χρήση πολικών συντεταγμένων
4. Άλλη αλλαγή συντεταγμένων που δίνεται
5. Επίλυση μέσω x-απλό/y-απλό

21.1 Άσκηση - Θέμα 5, Ιούνιος 2024

21.1.1 (α) ερώτημα

> 1.
> $$I_1 = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy dx$$

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι ολοκληρώνουμε στο μισό τμήμα του κύκλου που βρίσκεται άνω του άξονα $x'x$.



Συμβουλή

Όταν ολοκληρώνουμε κάτι της μορφής $(x^2 + y^2)$, πρώτα θα σκεφτόμαστε πολικές συντεταγμένες.

Θέτω $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

Λόγω της παραπάνω γεωμετρικής ερμηνείας, καταλαβαίνουμε ότι το $0 \le r \le 1$ και $0 \le \theta \le \pi$. Εναλλακτικά, το υπολογίζουμε ως εξής:

Για το y:

$$0 \le y \implies 0 \le r\sin\theta 0 \le r \le 10 \le \sin\theta \implies 0 \le \theta \le \pi$$

Για το x:

$$\begin{aligned} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} &\iff 0 \le y^2 \le 1 - x^2 \iff 0 \le r^2\sin^2\theta \le 1 - r^2\cos^2\theta \\ &\implies 0 \le r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \le 1 \le 0 \le r^2 \le 1 r \ge 00 \le r \le 1 \end{aligned}$$

Επίσης, ξέρουμε ότι ο πίνακας αλλαγής μεταβλητών για τις κυκλικές συντεταγμένες ισούται με r. Άρα,

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^\pi r^2 r\, d\theta dr = \int_0^1 \int_0^\pi r^3\, d\theta dr = \pi \int_0^1 r^3\, dr = \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

> 2.
> $$I_2 = \int_0^1 \int_{y^2}^1 e^{x^{3/2}}\, dx dy$$

Επειδή έχουμε όριο το y^2, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Για να αλλάξουμε τη σειρά θα πρέπει να βρούμε τα καινούργια όρια των ολοκληρωμάτων (αυτό λέει ότι πιθανώς να είναι το x/y-απλό).

$$\begin{gathered} y^2 \le x \le 1 \overset{y \ge 0}{\iff} 0 \le x \le 1 \\ y^2 \le x \iff y \le \sqrt{x} \implies 0 \le y \le \sqrt{x} \end{gathered}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_{y^2}^1 e^{x^{3/2}}\, dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} e^{x^{3/2}}\, dy dx = \int_0^1 e^{x^{3/2}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\left[e^{x^{3/2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}(e-1) \end{aligned}$$

21.1.2 (β) ερώτημα

> 3.
> $$I_3 = \iint_R x^2 - xy + y^2\, dx dy,$$
> όπου $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 \le 2\}$. Κάντε αλλαγή μεταβλητής $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v,\ y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$.

Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Συμβουλή

Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

$$\begin{aligned}
&2 \geq x^2 - xy + y^2 = \\
&\left(\sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)^2 + \left(\sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)\left(\sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v\right) + \left(\sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)^2 = \\
&4u^2 + \frac{4}{3}v^2 - 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 = 2u^2 + 2v^2
\end{aligned}$$

Άρα,

$$2u^2 + 2v^2 \leq 2 \iff u^2 + v^2 \leq 1$$

Οπότε $R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$, δηλαδή δίσκος από την αρχή των αξόνων με ακτίνα 1.

$$I_3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \iint_R (u^2 + v^2)\, dudv$$

Κάνουμε μετατροπή σε πολικές κυκλικές συντεταγμένες. Θέτω $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$:

$$I_3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r\, d\theta dr = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^1 r^3 2\pi\, dr = \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

21.2 Άσκηση - Θέμα B2, Φεβρουάριος 2024

Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης στο xy επίπεδο και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{1-x^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dydx$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

Πηγαίνουμε με πολικές συντεταγμένες, άρα $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Οπότε,

$$0 \leq r\cos\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad r\cos\theta \leq r\sin\theta \leq \sqrt{1 - r^2\cos^2\theta}$$

Έχουμε $0 \leq r\cos\theta \implies 0 \leq \cos\theta \implies \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης, έχουμε

$$r\cos\theta \leq r\sin\theta \iff \cos\theta \leq \sin\theta \implies 1 \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Οπότε για το θ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \\ 1 \leq \tan\theta \end{aligned}\right\} \implies \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

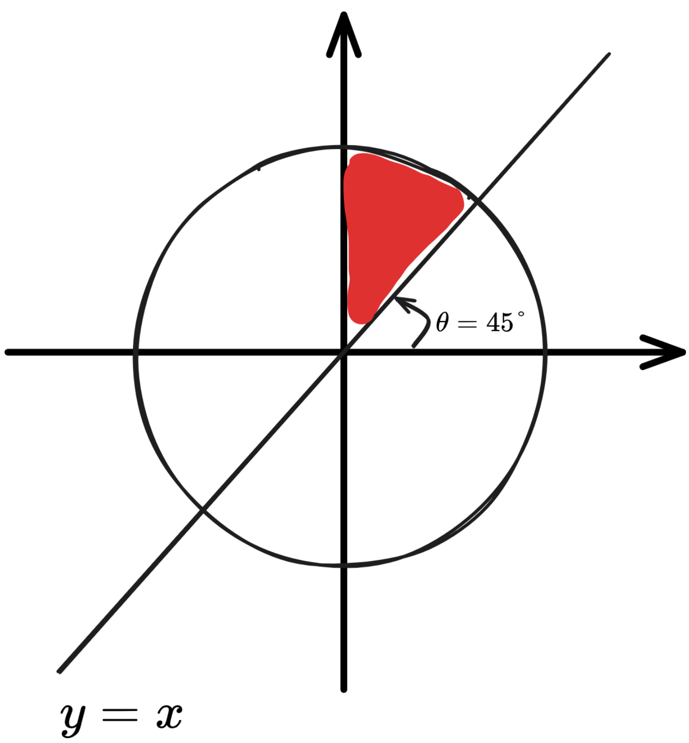
Για το r έχουμε

$$\begin{gathered} 0 \leq r\sin\theta \leq \sqrt{1 - r^2\cos^2\theta} \iff 0 \leq r^2\sin^2\theta \leq 1 - r^2\cos^2\theta \iff \\ 0 \leq r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \leq 1 \iff \\ 0 \leq r^2 \leq 1 \implies 0 \leq r \leq 1 \end{gathered}$$

Οπότε το χωρίο ολοκλήρωσης έχει τα εξής όρια:

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq r \leq 1$$

και είναι το τμήμα του μοναδιαίου κύκλου ανάμεσα στον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = x$.



Άρα, λύνοντας το ολοκήρωμα:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 r \cdot r dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3} [\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

21.3 Άσκηση - Θέμα 7, 2024

> $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq e^{x^2+y^2}\}$. Να βρείτε τον όγκο του W.

$$
|W| = \iiint_W dzdydx = \iiint_W 1\ dzdydx
$$

Θέτω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Το χωρίο D περιγράφει τον δακτύλιο ανάμεσα στους κύκλους με ακτίνες 1 και $\sqrt{2}$ αντίστοιχα.

$$
|W| = \iint_D \int_0^{e^{x^2+y^2}} dzdxdy = \iint_D e^{x^2+y^2}\ dxdy
$$

Χρησιμοποιώ πολικές κυκλικές συντεταγμένες. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Δεδομένου του D, θα έχουμε $r = \sqrt{x^2+y^2} \implies 1 \leq r \leq \sqrt{2}$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Το D σε πολικές συντεταγμένες μετατρέπεται σε

$$
D = \left\{(r, \theta) \mid r \in \left[1, \sqrt{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]\right\}
$$

Άρα

$$
|W| = \iint_D e^{x^2+y^2}\ dxdy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} e^{r^2} r d\theta dr = \pi \int_1^{\sqrt{2}} e^{r^2} 2r dr = \pi \left[e^{r^2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \pi(e^2 - e)
$$

22 2024-11-27 We

- Αλλαγή μεταβλητών σε *διπλά* ολοκληρώματα Χαλικιάς [3], σσ. 176-184

$$
dA = r\, dr d\theta
$$

  - **Παράδειγμα σ. 184**: Δύσκολο ολοκήρωμα στο $\mathbb{R}$ -> υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος στον $\mathbb{R}^2$ -> αλλαγή σε πολικές
- Αλλαγή μεταβλητών σε *τριπλά* ολοκληρώματα Χαλικιάς [3], σσ. 185-191

$$
dV = r\, dr d\theta dz
$$

  - πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες

Έστω ορθογώνιο σημείο (x, y, z). Οι κυλινδρικές του συντεταγμένες (r, θ, z) ορίζονται ως

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

ή αλλιώς

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{if } x > 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{if } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{if} x > 0 \text{ and } y < 0, \end{cases} \qquad \text{z=z,}$$

Ιακωβιανή ορίζουσα/πίνακας αλλαγής μεταβλητών

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

- πολικές σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι ένα σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για την περιγραφή σημείων στο τρισδιάστατο χώρο με βάση την απόσταση και τις γωνίες.

Ορισμός

Για ένα σημείο (x, y, z) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, οι σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) ορίζονται ως:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

Μετατροπή

Οι σφαιρικές συντεταγμένες προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Πεδία Ορισμού των Γωνιών ϕ και θ

- **Γωνία ϕ (πόλωση)**: $\phi \in [0, \pi]$. Για $\phi = 0$, το σημείο είναι στον θετικό άξονα z, και για $\phi = \pi$, στον αρνητικό άξονα z.
- **Γωνία θ (στροφή)**: $\theta \in [0, 2\pi)$. Για $\theta = 0$, το σημείο είναι στον θετικό άξονα x, και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z καθώς η γωνία αυξάνεται.

Ιακωβιανή ορίζουσα/πίνακας αλλαγής μεταβλητών

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2\sin\phi \qquad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2\sin\phi$$

23 2024-11-29 Fr

23.1 Παράδειγμα σ. 192

$$\iiint_W \exp\left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] dV$$

όπου W η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^2$.

Σημείωση

Χρησιμοποίει interchangeably τα r, ρ στις σφαιρικές συντεταγμένες.

23.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Χαλικιάς [3], σ. 193.

- **Διαδρομή** C: Καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$. Θα δούμε μόνο *λείες*(=διαφορίσιμες). Στην ουσία πρόκειται για σύνολο σημείων κι άρα διανυσμάτων (στον $\mathbb{R}^3$ τουλάχιστον) που προκύπτει από μία συνάρτηση γ που παραμετροποιείται από μία μεταβλητή t.

Συμβουλή

Η διαδρομή $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι παραγωγίσιμη όταν κι οι βαθμωτές $x(t), y(t), z(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

23.2.1 Διανυσματικά πεδία

Στον $\mathbb{R}^2$, ένα διανυσματικό πεδίο μπορούμε να το σπάσουμε σε δύο συνιστώσες. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, στις F_x, F_y.

24 2024-12-03 Tu (Φροντιστήριο)

24.1 Άσκηση - Θέμα A5, Φεβρουάριος 2024

$$I : \int_0^1 \int_0^{1-x} \sin[(1-y)^2]\, dy dx$$

Βολεύει να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

$$0 \leq y \leq 1-x \implies 0 \leq x \leq 1-yx \in [0,1] 0 \leq y \leq 1$$

Άρα

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \sin[(1-y)^2]\, dx dy = \int_0^1 \sin[(1-y)^2](1-y)\, dy = \left[-\frac{1}{2}\cos[(1-y)^2]\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 1)$$

24.2 Άσκηση - Θέμα 4, Σεπτέμβριος 2024

1.
$$I_1 \ : \ \iint e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$
$$I_2 \ : \ \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}\, dxdy$$

Για το I_1, αρχικά θα υπολογίσω το ολοκλήρωμα στο χωρίο $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$. Στη συνέχεια, θα υπολογίσω το $\lim_{a\to\infty} I_a$.

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

Θέτω $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, όπου $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$I_a = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\theta dr = \pi \int_0^a 2re^{-r^2}\, dr = \pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^a = \pi(1-e^{-a})$$

$$I_1 = \lim_{a\to\infty} I_a = \lim_{a\to\infty} \pi(1-e^{-a}) = \pi \qquad \square$$

Για το I_2, ξέρουμε ότι $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$. Προκύπτει εύκολα ότι

$$0 \leq y \leq x \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Άρα,

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dydx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \square$$

2. Σφαίρα με πυκνότητα
$$p(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$$
Να βρείτε τη μάζα της σφαίρας.

Συμβουλή

Γενικά ισχύει ότι
$$m = \iiint_{S^2} p(x,y,z)\, dxdydz,$$
όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$. $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Κάνω αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2} \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r^2}{1+r^2} \, d\theta \, dr = \int_0^1 \frac{4\pi r^2}{1+r^2} \, dr = 4\pi \left(\int_0^1 dr \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \, dr \right) \\
&= 4\pi - 4\pi \left[\arctan r\right]_0^1 = 4\pi - \pi^2
\end{aligned}
$$

24.3 Άσκηση - Θέμα 6, αγνώστου χρόνου

> Έχουμε χωρίο $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > 0, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$. Πυκνότητα $p(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Βρείτε τη μάζα του U.

Χρησιμοποιώ σφαιρικές συντεταγμένες.

$$
1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \implies 1 \le r^2 \le 4 \implies 1 \le r \le 2
$$

$$
\left.\begin{aligned} z > 0 \implies r\cos\phi > 0 \implies \cos\phi > 0 \\ 0 \le \phi \le \pi \end{aligned}\right\} \implies \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)
$$

$$
\left.\begin{aligned} y > 0 \implies r\sin\phi\sin\theta > 0 \implies \sin\theta > 0 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned}\right\} \implies \theta \in [0, \pi]
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
m &= \int_1^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{r}} r^{\cancel{2}} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dr = \int_1^2 \int_0^{\pi} r \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} \, d\theta \, dr \\
&= \int_1^2 \pi r \, dr = \frac{p}{2} [r^2]_1^2 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

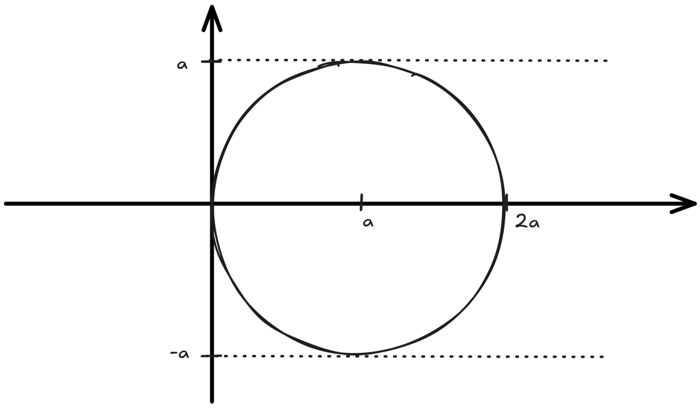
Συμβουλή

Για μάζα, παίρνουμε τον τύπο $m = \iiint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, δηλαδή ολοκληρώνουμε τη πυκνότητα.
Για όγκο, απλά παίρνουμε τριπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο που μας δίνεται.

24.4 Άσκηση - Θέμα 3, Φεβρουάριος 2022 (Ομάδα Β)

> Έστω $a > 0$.
> 1. Ζωγραφίστε τον κύκλο $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες.
> 2. Να υπολογίσετε το
>
> $$I = \int_D \int \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$
>
> όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \le a^2\}$.

24.4.1 Ερώτημα 1



Θέτω $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Επομένως,

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 = a^2 &\iff r^2\cos^2\theta - 2ar\cos\theta + \cancel{a^2} + r^2\sin^2\theta = \cancel{a^2} \\ &\iff r^2 - 2ar\cos\theta = 0\end{aligned}$$

Γεωμετρικά, βλέπουμε ότι $0 \le r \le 2a$. Με παρόμοιο τρόπο, καταλήγουμε ότι $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Λιγότερο αυστηρά, μπορούμε να πούμε ότι $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

24.4.2 Ερώτημα 2

Τελικά, τα όρια του r είναι $0 \le r \le 2a\cos\theta$ από την παραπάνω εξίσωση.

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos\theta(1-\sin^2\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos\theta\,d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = \ldots \\ &= \frac{8a^3}{3}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{8a^3}{9}\left[\sin^3\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8a^3}{3}\end{aligned}$$

24.5 Άσκηση - Θέμα 4, Φεβρουάριος 2022, Ομάδα A

> Έστω χωρίο $D \subset \mathbb{R}^3$, το οποίο βρίσκεται πάνω από το $z = 0$ και κάτω από το γράφημα της $z = 1 - x^2 - y^2$.
> 1. Να περιγραφεί το D σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
> 2. Να υπολογιστεί ο όγκος του D.

24.5.1 Ερώτημα 1

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

Από το παραπάνω,

$$0 \leq z \leq 1 - r^2 \implies D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - r^2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

24.5.2 Ερώτημα 2

$$\begin{aligned} I = \iiint_D 1\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r\, dz\, d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r\, d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 2r(1 - r^2)\, dr = \pi \int_0^1 2r - 2r^3\, dr = \cdots = \pi \end{aligned}$$

25 2024-12-04 We

Επικαμπύλια ολοκληρώματα [3, σ. 193].

- $L(\gamma)$: Το *μήκος* της διαδρομής γ.
- **ds**: Η απειροστή μετατόπιση σωματιδίου, με ds το μέτρο του.

Σημείωση

Καθώς θα βλέπουμε διανυσματικά πεδία, όπου σε κάθε σημείο θα ορίζεται ένα διάνυσμα, θα παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο αυτού με το διάνυσμα **ds**. Αυτό, σε πεδία δύναμης, θα καθιστά το *έργο* του σωματιδίου.

25.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου είδους

Χαλικιάς [3], σ. 204.

Ολοκλήρωμα της $f(x, y, z)$ κατά μήκος της διαδρομής $\gamma(t)$

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

που εκφράζει το μήκος της διαδρομής.

Σε διαδρομές που δεν είναι συνεχείς/διαφορίσιμες σε συγκεκριμένα σημεία, μπορούμε να θεωρήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως το άθροισμα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στα επιμέρους συνεχή τμήματα της διαδρομής.

25.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα 2ου είδους

Χαλικιάς [3], σ. 208.

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Εκφράζει το *έργο* της διαδρομής.

26 2024-12-06 Fr

- Παραδείγματα επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων 2ου είδους [3, σσ. 213–214].

Ισχύει ότι

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

26.1 Αναπαραμετρικοποίηση

Οι αναπαραμετρικοποιήσεις μπορούν να διαχωριστούν ανάλογα με το εάν ο **προσανατολισμός** της διαδρομής διατηρείται ή όχι [3, σ. 217].

Ανάλογα με το παραπάνω, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους διατηρεί ή αλλάζει πρόσημο [3, σ. 218].

Τα ολοκληρώματα 1ου είδους μένουν ίδια [3, σ. 219].

$$\int_\gamma \nabla f \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Εδώ, η f είναι το *δυναμικό* του *συντηρητικού* πεδίου $F = \nabla f$. Έχουμε $W = 0$ [3, σ. 221].

Προσοχή

Εύρεση συντηρητικού πεδίου
Έστω $\phi(x, y, z) = x^2 y + yz$.

$$F = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$= 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

Έστω ότι δεν ξέρουμε την ϕ. Τότε, ψάχνουμε εάν υπάρχει συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε για

$$F = \underbrace{2xy}_{F_x}\mathbf{i} + \underbrace{(x^2 + z)}_{F_y}\mathbf{j} + \underbrace{y}_{F_z}\mathbf{k}$$

να ισχύει ότι:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x = 2xy$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_y = x^2 + z$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_z = y$$

η οποία ξέρουμε ότι θα είναι μοναδική.
Για να τη βρούμε, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε:

$$F_x \implies \phi = x^2 y + h(y, z) \implies \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial h(y, z)}{\partial y} = x^2 + z$$
$$\implies \frac{\partial h(y, z)}{\partial z} = z \implies h(y, z) = zy + g(z) \ldots$$

Άρα βρήκαμε ότι η $\phi = x^2 y + yz + g(z)$ ικανοποιεί τους δυο πρώτους από τους παραπάνω τρεις περιορισμούς. Για $g(z) = c$ ικανοποιεί και τις τρεις. Οπότε βρήκαμε την ϕ συνάρτηση δυναμικού για το F.

Αν δεν ήταν συντηρητικό το πεδίο, σε κάποιο βήμα θα βρισκόμασταν σε κάποια αντίφαση.

26.2 Ολοκληρώματα επί γεωμετρικών καμπυλών

Χαλικιάς [3], σ. 223.

27 2024-12-10 Tu

27.1 Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες

Χαλικιάς [3], σ. 227.

Διανυσματική παραμετρικοποίηση επιπέδου Π:

$$\Phi(u, v) = \Pi = \{u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + \mathbf{c} \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathbf{T_u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \qquad \mathbf{T_v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

27.1.1 Εμβαδόν επιφάνειας

Χαλικιάς [3], σ. 232.

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \|\mathbf{T_u} \times \mathbf{T_v}\| \, dudv \\ &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \, dudv \end{aligned}$$

28 2024-12-11 We

28.1 Εμβαδόν επιφάνειας γραφήματος $z = g(x, y)$

Χαλικιάς [3], σ. 237.

$$\int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \;\, dA$$

28.2 Ολοκληρώματα βαθμωτών συναρτήσεων επί επιφανειών

Χαλικιάς [3], σ. 238.

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, dudv$$

29 2024-12-13 Fr

29.1 Ολοκληρώματα επί γραφημάτων

Χαλικιάς [3], σ. 241.

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta} dxdy$$

Σημείωση

Βολεύει να χρησιμοποιούμε το μοναδιαίο $\hat{\mathbf{n}}$ αντί για το απλό κάθετο $\mathbf{n}$, καθώς τότε βρίσκουμε κατευθείαν το $\cos\theta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}$.

29.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων

Χαλικιάς [3], σ. 245.

$$\iint_\Phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v) dudv$$

Μοναδιαία διανύσματα *προσανατολισμένης επιφάνειας*:

$$\frac{\mathbf{T}_{u_0} \wedge \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \wedge \mathbf{T}_{v_0}\|} = \pm \mathbf{n}_1, \quad -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$$

Μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική κατεύθυνση του σφαιρικού πολικού συστήματος συντεταγμένων:

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta \sin\phi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\phi \mathbf{j} + \cos\phi \mathbf{k}$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\theta &= \sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\phi &= \cos\theta \cos\phi \mathbf{i} + \sin\theta \cos\phi \mathbf{j} - \sin\phi \mathbf{k} \end{aligned}$$

30 2024-12-17 Tu

Παραδείγματα εύρεσης *ροής* διαμέσω επιφάνειας [3, σσ. 254–257].

Σημείωση

Σε σφαίρα, το κάθετο διάνυσμα βρίσκεται κατά την ακτινική διεύθυνση, άρα $\mathbf{n} = \mathbf{r} = (x, y, z)$.

Εμβαδόν μοναδιαίας σφαίρας $= 4\pi$.

30.1 Απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου

Χαλικιάς [3], σ. 259.

Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα *άλλο* βαθμωτό διανυσματικό πεδίο.

Τελεστής ανάδελτα (∇): Πρόκειται για τελεστή με τον οποίο “πολλαπλασιάζουμε” (βαθμωτές) συναρτήσεις και διανυσματικά πεδία. Στην περίπτωση της *κλίσης*, αποτελεί απλό πολλαπλασιασμό. Όμως ορίζεται και το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο.

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Απόκλιση:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

30.2 Θεώρημα Gauss

Χαλικιάς [3], σ. 264.

Θεώρημα 30.1: Gauss

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int\int\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV$$

31 2024-12-18 We

31.1 Στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου

Χαλικιάς [3], σ. 266.

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Σημείωση

- Θεώρημα Gauss -> Απόκλιση
- Θεώρημα Stokes, Θεώρημα Green -> Στροβιλισμός

31.2 Θεώρημα Stokes

Χαλικιάς [3], σ. 272.

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$$

31.3 Θεώρημα Green

Χαλικιάς [3], σ. 273.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \oint_C F_x dx + F_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy$$

32 2024-12-20 Fr

32.1 Θέμα 1

> Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ που εφάπτεται στην $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ στο σημείο $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

$$\langle \mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle = 0 \iff \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x,y,z) \\ \mathbf{r}_0 &= (x_0,y_0,z_0) \\ \mathbf{n} &= (n_1,n_2,n_3) \\ \langle \mathbf{r},\mathbf{n}\rangle &= \langle \mathbf{r}_0,\mathbf{n}\rangle \end{aligned}\right\} \implies n_1x+n_2y+n_3z = \underbrace{n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0}_{c}$$

Συμβουλή

Για μία επιφάνεια στάθμης $S_c = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = c\}$, για κάθε $(x_0,y_0,z_0) \in S_c$, ισχύει ότι

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp S_c$$

$$S_1 = \{(x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f} = 1\}$$

$$\mathbf{n} = \nabla f = (2x,2y,2z) \implies \mathbf{n}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 &\iff \frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ &\iff \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) = 2 \iff \boxed{x+y+z=\sqrt{3}} \end{aligned}$$

32.2 Θέμα 2

Να βρεθούν τα όρια:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+2y^2}}_{\leq 1}\sin^2 y \leq \sin^2 y \to 0,$$

καθώς $y \to 0$. Άρα το όριο τείνει στο 0.

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = 1$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

> 3.
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0^2x^2}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2y^2}{3y^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

32.3 Θέμα 3

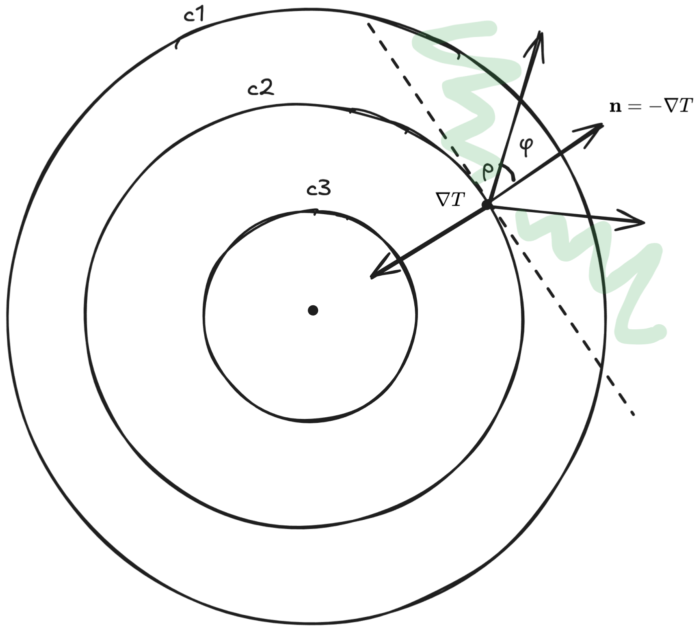
> Πεδίο θερμοκρασίας $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$. Βρισκόμαστε στο σημείο $p = (x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$.
> 1. Κατά ποια κατεύθυνση πρέπει να απομακρυνθούμε ώστε η θερμοκρασία να μειωθεί όσο το δυνατόν πιο γρήγορα;
> 2. Το σκάφος ταξιδεύει με ταχύτητα $v = e^8\ m/s$. Πόσο γρήγορα θα μειωθεί η θερμοκρασία αν κινηθεί σε αυτή τη κατεύθυνση;
> 3. Αν $\frac{dT}{dt} < -\sqrt{14}e^2$, το μέταλλο του σκάφους θα ραγίσει. Βρείτε τη διεύθυνση για την οποία δεν θα γίνει αυτό.
>
> Marsden και Tromba [1], εν. 2.6, ασκ. 22, σ. 143.

32.3.1 Ερώτημα 1

Η τιμή του βαθμωτού πεδίου θερμοκρασίας αυξάνεται με μέγιστη ταχύτητα κατά τη φορά της κλίσης του, οπότε θέλουμε τη $\mathbf{n} = -\nabla T$. Άρα,

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = (-2x, -4y, -6x)e^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

$$\nabla T(1,1,1) = (-2,-4,-6)e^{-6} \implies -\nabla T(1,1,1) = \boxed{(2,4,6)e^{-6}}$$



Εικόνα 1: Επιφάνειες στάθμης με $T = c_1, c_2, c_3$ με $c_1 < c_2 < c_3$.

32.3.2 Ερώτημα 2

$$T(x(t), y(t), z(t))$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\nabla T} \cdot \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)}_{\mathbf{v}}$$

Οπότε,

$$\frac{dT}{dt} = \nabla T \cdot \mathbf{v} = \nabla T \cdot e^8 \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} = e^8 \|\nabla T\| \underbrace{\cos 180}_{-1} = -e^8 e^{-6}\sqrt{56} = \boxed{-2e^2\sqrt{14}}$$

32.3.3 Ερώτημα 3

Στην κατεύθυνση **n** ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι ελάχιστος. Κάθετα στο **n**, $\frac{dT}{dt} = 0$. Άρα δεξιά της εφαπτόμενης το σκάφος ψύχεται, ενώ αριστερά θερμαίνεται. Οπότε θέλουμε να κινηθούμε προς τα δεξιά, αλλά όχι με φορά κοντινή του **n**. Στην ουσία, θέλουμε να κινηθούμε προς τα κάπου μέσα στο πράσινο του παραπάνω σχεδιαγράμματος.

Επειδή στην ουσία ψάχνουμε τη γωνία ϕ που κάνει η κατεύθυνση που ζητάμε με το **n**, αντικαθιστούμε με ϕ τις 180 μοίρες στην πάνω εξίσωση και λύνουμε ανάλογα.

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = e^8 \|\nabla T\| \cos\phi = -\sqrt{14}e^2 \iff e^8 e^{-6} 2\sqrt{14}\cos\phi = -\sqrt{14}e^2 \implies$$
$$\cos\phi = 0.5 \implies \phi = \pm 60$$

Άρα οι επιτρεπτές γωνίες είναι $|\phi| \in (60, 90)$.

32.4 Θέμα 4

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y), \quad f(x,y) = (y-x)^2 + (y^2 - x + 1)^2$$

Επίσης, νδο το σημείο (x^*, y^*) στο οποίο ελαχιστοποιείται είναι μοναδικό με $(x^*, y^*) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(y-x) - 2(y^2 - x + 1) = 0 \\ &\implies \underbrace{-2y^2 - 2y + 4x - 2}_{f_x} = 0 \implies 2x - y - y^2 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f_y = 0 \implies \cdots \implies 4y^3 - 4xy + 6y - 2x = 0 \tag{2}$$

εξ. 1 $\implies 2x = y^2 + y + 1$, εξ. 2 $\implies 2y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$.

$$\implies (2y-1)\underbrace{(y^2 - y + 1)}_{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 > 0} = 0 \implies y = \frac{1}{2} \implies x = \frac{7}{8}$$

Άρα έχουμε ένα κρίσιμο σημείο, το $(x, y) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 4 & -4y-2 \\ -4y-2 & 12y^2 - 4x + 6 \end{bmatrix}\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} D = \det H = 22 - 16 = 6 > 0 \\ H_{11} > 0 \end{aligned}\right\} \implies \min$$

Για να δείξουμε ότι πρόκειται για ολικό ελάχιστο, θα πρέπει να μελετήσουμε τη συνάρτηση καθώς τείνει στο άπειρο. Ως άθροισμα τετραγώνων δεν μπορεί να πάει στο $-\infty$, άρα το σημείο που βρήκαμε είναι το μοναδικό τοπικό ελάχιστο.

33 2025-01-07 Tu

33.1 Θέμα 1

Κρίσιμα σημεία και ταξινόμηση.

$$f(x,y) = x^3 + 3y - y^3 - 3x$$

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1 \\ f_y &= 3 - 3y^2 = 0 \implies y = \pm 1 \end{aligned}$$

$$f_{xx} = 6x$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$
$$f_{yy} = -6y$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

- $(1,1)$: $D < 0 \implies$ σαγματικό σημείο
- $(-1,-1)\ :\ D < 0 \implies$ σαγματικό σημείο
- $(1,-1)\ :\ D = 36 > 0, H_{11} = 6 > 0 \implies$ τοπικό ελάχιστο
- $(-1,1)\ :\ D > 0, H_{11} < 0 \implies$ τοπικό μέγιστο

Ορισμός 33.1: Ανάπτυγμα Taylor 2ου βαθμού

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) =& f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\delta_x + f_y(x_0, y_0)\delta_y + \\ & \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)(\delta_x)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\delta_x\delta_y + f_{yy}(x_0, y_0)(\delta_y)^2\right] + R_2, \end{aligned}$$

$\frac{R_2}{\|\delta_x\delta_y\|^2} \to 0$.

Αν το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο, οι μερικές παράγωγοι φεύγουν και η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε:

$$f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)(\delta_x)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\delta_x\delta_y + f_{yy}(x_0, y_0)(\delta_y)^2\right]$$

όπου με τη σειρά του μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta_x & \delta_y\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}}_{H}(x_0, y_0) \begin{bmatrix}\delta_x \\ \delta_y\end{bmatrix}$$

33.2 Άσκηση

Έστω $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

$$\left.\begin{aligned} f_x = 2x + 4y = 0 \\ f_y = 2y + 4x = 0 \end{aligned}\right\} \implies x = 0, y = 0$$

33.2.1 1ος τρόπος

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 4$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

κτλ.

33.2.2 2ος τρόπος

Έστω ότι η f είναι το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $(0,0)$.

$$f(0+\delta_x, 0+\delta_y) - f(0,0) = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2 + 4(\delta_x)(\delta_y)$$

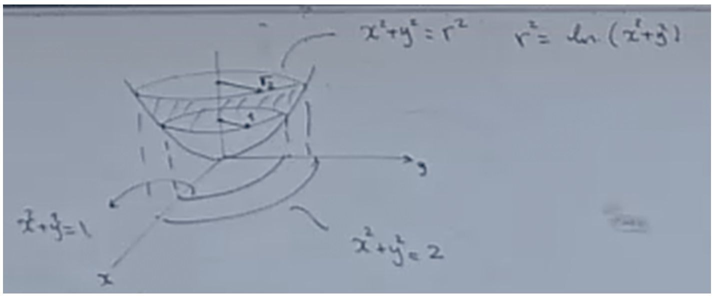
$D < 0$, από πάνω. Άρα έχουμε σαγματικό σημείο. Άρα μπορούμε πάντα να βρούμε τιμές των δ_x, δ_y τέτοιες ώστε η f να παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές.

$$f(0+\delta_x, 0+\delta_y) - f(0,0) = [\delta_x + 2\delta_y]^2 - 3\delta_y^3$$

Έστω $\delta_y = 0$. Τότε η διαφορά θα είναι θετική. Αν $\delta_x = -2\delta_y$, η διαφορά θα είναι αρνητική.

33.3 Θέμα 2

> $W \subseteq \mathbb{R}^3$ κάτω από το γράφημα $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ και πάνω από το χωρίο $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ στο (x,y) επίπεδο.
> 1. Όγκος του W.
> 2. Διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (2x - xy)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, να βρεθεί το
>
> $$\iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathbf{ds}$$



33.3.1 Ερώτημα 1

$$\begin{aligned}
\text{Όγκος}(W) &= \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} e^{r^2} r\,d\theta dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} e^{r^2} r\,dr = \pi \int_1^{\sqrt{2}} 2r \cdot e^{r^2}\,dr \\
&= \pi[e^{r^2}]_1^{\sqrt{2}} = \pi(e^2 - e) = \pi e(e-1)
\end{aligned}$$

33.3.2 Ερώτημα 2

Από θεώρημα Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{ds} = \iiint_W \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2 - y - 1 + y = 1$$

Άρα, εφόσον ολοκληρώνουμε τη μονάδα, το παραπάνω τριπλό ολοκλήρωμα ισούται με τον όγκο του $W = \pi e(e-1)$.

Προσοχή

Αυτή η απάντηση αρκεί αν το ζητούμενο είναι η ροή του πεδίου ως προς την *κλειστή* επιφάνεια.

Έστω ότι η ροή που ζητούταν είναι ανεξάρτητη από τον πάνω και κάτω δίσκο, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη γύρω-γύρω επιφάνεια. Σε αυτή τη περίπτωση, δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Gauss. Θα είχαμε:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} = \iint_{\text{καμπ.}} + \iint_{\text{πάνω επιφάνεια}} + \iint_{\text{κάτω επιφάνεια}}$$

Άρα θα έπρεπε να υπολογίσουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα και να αφαιρούσαμε από τον όγκο τους δύο τελευταίους όρους ώστε να βρίσκαμε τη ροή στην καμπύλη.

Στην προκειμένη περίπτωση, οι δύο τελευταίοι όροι βγαίνουν 0.

Η πάνω επιφάνεια είναι κύκλος με ακτίνα $\sqrt{2}$ και $ds = rdrd\theta$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{πάνω επιφάνεια}} &= \iint_{\text{πάνω επιφάνεια}} \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}}\ \mathbf{ds} = \iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} r dr d\theta = \iint F_z r\, dr d\theta \\
&= \iint yzrdrd\theta = z_0 \iint r \sin\theta r dr d\theta = z_0 \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta}\, dr = 0
\end{aligned}$$

Άρα επαληθεύσαμε ότι η ροή από την πάνω επιφάνεια είνα 0. Αντίστοιχα και για την κάτω.

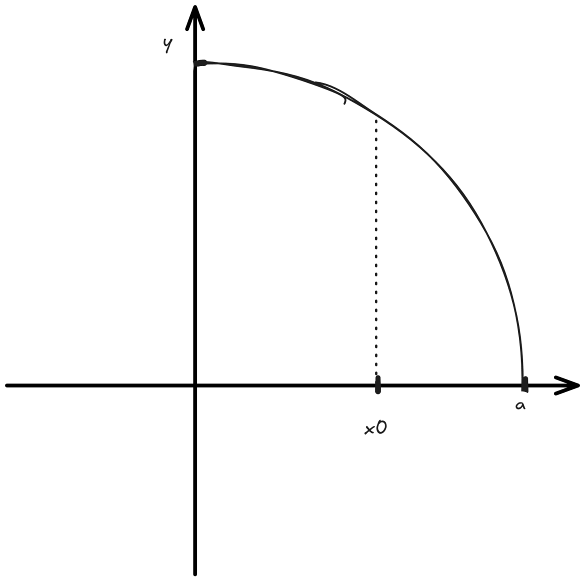
33.4 Θέμα 3

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίστε τα

$$I_1 = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy dx$$

για $a > 0$ και

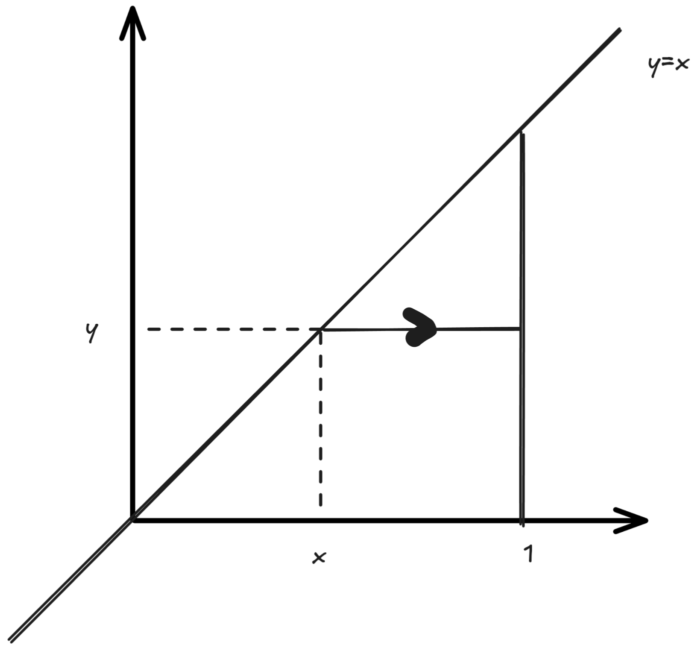
$$I_2 = \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\, dx dy$$



$$I_1 = \int_y \int_x \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\, dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}[x]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\, dy$$

$$= \int_0^a a^2 - y^2\, dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$



$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_x \int_y \sin x^2 \, dy dx = \int_0^1 \int_0^x \sin x^2 \, dy dx \\
&= \int_0^1 \sin x^2 [y]_0^x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2}[-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)
\end{aligned}
$$

34 2025-01-08 We

34.1 Θέμα 1

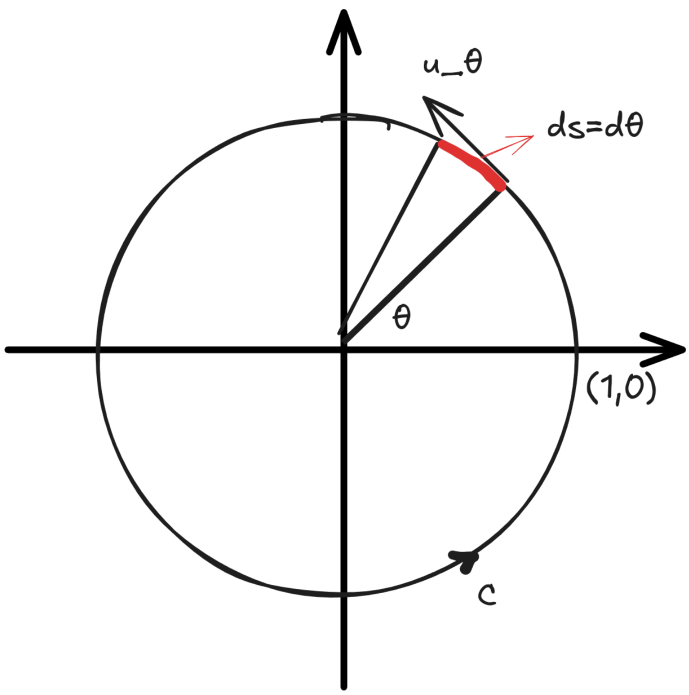
> Έστω C η καμπύλη $x^2 + y^2 = 1$ στο επίπεδο $z = 1$. Έστω $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{k}$. Να βρεθούν:
> 1. $\nabla \wedge \mathbf{F}$
> 2. $\oint_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ (με άμεσο υπολογισμό)
> 3. $\oint_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ (μέσω θεωρήματος Stokes/Green)

34.1.1 Ερώτημα 1

$$
\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & 0 & y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 - 0) - \mathbf{j}(0 - 1) + \mathbf{k}(0 + 1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}
$$

34.1.2 Ερώτημα 2

Έχουμε έναν κύκλο στο επίπεδο $z = 1$. Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες.



Έχουμε $ds = d\theta$ ενώ $\mathbf{ds} = \mathbf{u}_\theta d\theta$. Επίσης, $\mathbf{F} = (1 - \sin\theta)\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{k}$.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = [(1 - \sin\theta)\mathbf{i} + \cancel{\sin\theta\mathbf{k}}] \cdot \mathbf{u}_\theta d\theta$$

Το $\mathbf{i}$ αναλύεται σε $\cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta$. Άρα,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = (1 - \sin\theta)(\cancel{\cos\theta\mathbf{u}_r} - \sin\theta\mathbf{u}_\theta) \cdot \mathbf{u}_\theta d\theta = (\sin^2\theta - \sin\theta)d\theta$$

Οπότε,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta - \cancelto{0}{\sin\theta} d\theta$$

Έχουμε ότι $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \implies \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$. Άρα,

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \cancelto{0}{\frac{1}{2}\cos 2\theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

34.1.3 Ερώτημα 3

$$\iint_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \implies \iint_S (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi$$

34.2 Θέμα 2

$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

1. $\nabla \wedge \mathbf{F}$ και να δείξετε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό.
2. Επιβεβαιώστε το 1 υπολογίζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού.
3. Έστω τετράγωνο στο επίπεδο (x, y) με κορυφές $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ και C η καμπύλη που ανιστοιχεί στη περίμετρο του τετραγώνου με θετικό προσανατολισμό. Να υπολογίσετε με άμεσο τρόπο το $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$.

34.2.1 Ερώτημα 1

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + z & y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1-1) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(2y - 2y) = \mathbf{0}$$

Εφόσον ο στροβιλισμός είναι μηδέν σε όλον τον χώρο, έχουμε αστρόβιλο κι άρα **συντηρητικό** πεδίο.

34.2.2 Ερώτημα 2

$\mathbf{F} = \nabla f \iff \mathbf{F}$ συντηρητικό. Άρα, $\exists f(x, y, z)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{F}$$

Άρα

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{\partial f}{\partial x} \implies f = y^2 x + g(y,z) \implies \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y} \\ 2xy + z &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y} \implies \frac{\partial g}{\partial y} = z \implies g(y,z) = yz + h(z) \\ y &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

όπου έχουμε

$$\begin{matrix} f = y^2 x + yz + hz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = y \end{matrix} \implies y + h'(z) = y \implies h'(z) = 0 \implies h(z) = c(= 0)$$

Άρα καταλήγουμε στην συνάρτηση δυναμικού

$$\boxed{f = y^2 x + yz}$$

34.2.3 Ερώτημα 3

Έχουμε $z = 0$.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

όπου π.χ. $C_2 = (1,0) \to (1,1)$.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} (= 0)$$

$C_1 \,:\, 0 \leq x \leq 1, y = 0, z = 0$. $\mathbf{ds} = \mathbf{i}dx$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \implies \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

$C_2 \,:\, x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$. $\mathbf{ds} = \mathbf{j}dy$.

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = (y^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}dy = 2y\,dy \implies$$
$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^1 2ydy = 1$$

$-C_3 \,:\, y = 1, 0 \leq x \leq 1, z = 0$. $\mathbf{ds} = \mathbf{i}dx$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = dx \implies \int_{-C_3} dx = \int_0^1 dx = 1 \implies \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = -1$$

$-C_4 \,:\, x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 0$. $\mathbf{ds} = \mathbf{j}dy$.

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + y\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0 \implies \int_{-C_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

Άρα

$$C = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$$

34.3 Θέμα 3

> Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 1$ και ταξινομήστε τα.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x - 2y = 0 \\ f_y &= 4y - 2x + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \implies y = x = -2$$

Άρα έχουμε μόνο ένα κρίσιμο σημείο, το $(-2,-2)$.

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= 2 \\
f_{yy} &= 4 \\
f_{xy} &= -2
\end{aligned}
$$

$$
H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}
$$

$D > 0, H_{11} > 0 \implies$ τοπικό ελάχιστο.

Επιβεβαιώνουμε μέσω αναπτύγματος Taylor.

$$
\begin{gathered}
f(-2+\delta_x, -2+\delta_y) - f(-2,-2) = \\
\frac{1}{2}[f_{xx}(-2,-2)(\delta_x)^2 + 2f_{xy}(-2,-2)\delta_x\delta_y + f_{yy}(-2,-2)(\delta_y)^2] = \\
(\delta_x)^2 - 2\delta_x\delta_y + 2(\delta_y)^2 = (\delta_x - \delta_y)^2 + (\delta_y)^2
\end{gathered}
$$

όπου πάντα θετικό για $(\delta_x, \delta_y) \neq (0,0)$. Άρα όντως τοπικό ελάχιστο.

35 2025-01-10 Fr

35.1 Θέμα 1

> Έστω η επιφάνεια ενός κυλίνδρου $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Υπολογίστε τη ροή του πεδίου $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ διαμέσω της S,
> 1. Με επιφανειακό ολοκλήρωμα
> 2. Με χρήση του θεωρήματος Gauss

35.1.1 Ερώτημα 1

$$
\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{n}\, dS}_{\mathbf{ds}}
$$

Έχουμε $dS = d\theta dz$ και $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$, άρα $\mathbf{ds} = \mathbf{u}_r d\theta dz$. Το $\mathbf{F}$ πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου θα είναι $\sin\theta \mathbf{i}$, όπου σε πολικές συντεταγμένες $\mathbf{i} = \cos\theta \mathbf{u}_r - \sin\theta \mathbf{u}_\theta$.

$$
\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sin\theta(\cos\theta \mathbf{u}_r - \cancel{\sin\theta \mathbf{u}_\theta}) \cdot \mathbf{u}_r d\theta dz = \sin\theta\cos\theta\, d\theta dz = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta dz
$$

Τα όρια θα είναι $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1$.

$$
\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, dz\, d\theta = 0,
$$

αφού ολοκληρώνουμε ημίτονο στο $[0, 2\pi]$.

35.1.2 Ερώτημα 2

Με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$$

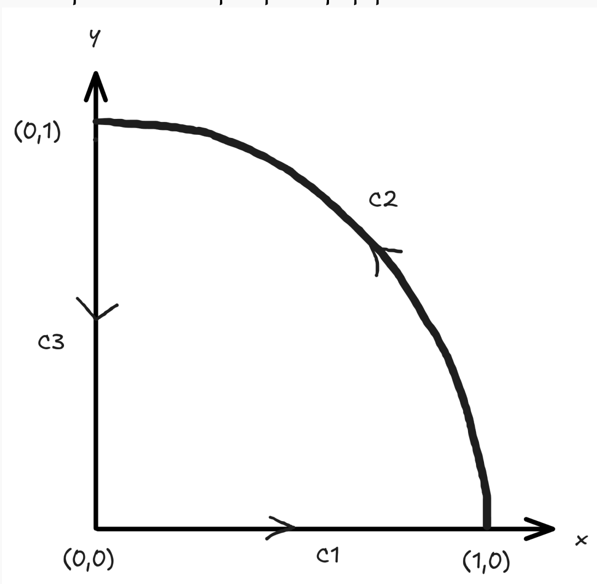
Άρα $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = 0$.

35.2 Θέμα 2

1. Δείξτε ότι το πεδίο $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2$.
2. Επιβεβαιώστε το 1 υπολογίζοντας το

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

όπου C η θετικά προσανατολισμένη διαδρομή



35.2.1 Ερώτημα 1

$\mathbf{F}$ συντηρητικό $\iff$ $\mathbf{F} = \nabla f$, για κάποια f συνάρτηση δυναμικού. Μία τέτοια είναι η $f = xy$.

Αναλυτικά, βγαίνει ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = y &\implies f = yx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{x} + h'(y) = \cancel{x} &\implies h(y) = c = 0 \\ &\implies f = yx \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του πεδίου. Αν είναι μηδέν παντού, τότε είναι αστρόβιλο κι άρα συντηρητικό.

35.2.2 Ερώτημα 2

$C_1 \,:\, 0 \le x \le 1, y = 0 \implies \mathbf{F} = x\mathbf{j}, \mathbf{ds} = \mathbf{i}dx.$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = x\mathbf{j} \cdot dx\mathbf{i} = 0 \implies \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

C_2 : Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. $ds = 1 \cdot d\theta \implies \mathbf{ds} = \mathbf{u}_\theta d\theta.$

$$\mathbf{F} = \sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} = \sin\theta(\cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta) + \cos\theta(\sin\theta\mathbf{u}_r + \cos\theta\mathbf{u}_\theta)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} &= [\sin\theta(\cancel{\cos\theta\mathbf{u}_r} - \sin\theta\mathbf{u}_\theta) + \cos\theta(\cancel{\sin\theta\mathbf{u}_r} + \cos\theta\mathbf{u}_\theta)] \cdot \mathbf{u}_\theta d\theta \\ &= (-\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \cos 2\theta\, d\theta\end{aligned}$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

$-C_3 \,:\, x = 0, 0 \le y \le 1 \implies \mathbf{F} = y\mathbf{i}, \mathbf{ds} = dy\mathbf{j}.$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = y\mathbf{i} \cdot dy\mathbf{j} = 0 \implies -\int_{-C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

Άρα

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0 + 0 + 0 = 0$$

35.3 Θέμα 3

Έστω $\mathbf{F}$ κλάσης C^2 στον $\mathbb{R}^3$.

1. Δείξτε ότι αν S κλειστή επιφάνεια, τότε

$$\iint_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} = 0$$

2. Μέσω κατάλληλου τριπλού ολοκληρώματος, δείξτε ότι ο όγκος της σφαίρας ακτίνας a είναι $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
3. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, υπολογίστε το

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathbf{ds}$$

όπου $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, $S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}$ και $\mathbf{n} \perp dS$.

35.3.1 Ερώτημα 1

Εφαρμόζουμε θεώρημα Gauss ως εξής:

$$\iint_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) dv$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \\
&\quad \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Επειδή το $\mathbf{F}$ είναι κλάσης C^2, οι μεικτές παράγωγοι 2ης τάξης είναι ίσες. Άρα η παραπάνω έκφραση ισούται με 0. Άρα και το ολοκλήρωμα θα ισούται με 0.

35.3.2 Ερώτημα 2

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.

$$dV = r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V dV &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, dr = \int_0^a r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi}_{[-\cos\phi]_0^{\pi}=2} \\
&= 4\pi \int_0^a r^2\, dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

35.3.3 Ερώτημα 3

Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Gauss πρέπει να έχουμε κλειστές επιφάνειες. Οπότε, ορίζουμε την κλειστή επιφάνεια $S = S_1 \cup S_2, S_2 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Εφαρμόζοντας Gauss στην κλειστή επιφάνεια, θα έχουμε:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv \tag{3}$$

όπου

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathbf{ds} \tag{4}$$

Έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y}(z^2)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial z}(x^2)} = 1$$

Άρα στην εξ. 3 βρίσκουμε τον όγκο μιας μισής σφαίρας με ακτίνα 1. Από το (2) έχουμε βρει τον όγκο μιας πλήρης σφαίρας, άρα εδώ θα έχουμε $\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 1^2 = \frac{2\pi}{3}$.

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε τον δεύτερο όρο στα δεξία της εξ. 4 για να βρούμε τον πρώτο. Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Θα έχουμε $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, για να δείχνει *μακριά* από την κλειστή επιφάνεια. Το πεδίο θα είναι

$$\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + x^2\mathbf{k} = r(\cos\theta + \sin\theta)\mathbf{i} + r^2\cos^2\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathbf{ds} = -r^2\cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta = -r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta$$

Άρα

$$\Phi_{\text{κάτω}} = -\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = -\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\cos 2\theta\, d\theta} = -\frac{\pi}{4}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \iff \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$.

Τέλος, βρίσκουμε το ζητούμενο από την εξ. 4:

$$\frac{2\pi}{3} = \Phi - \frac{\pi}{4} \iff \Phi = \frac{11\pi}{12}$$

Αναφορές

[1] J. E. Marsden και A. Tromba, *Vector Calculus*, 6th ed., International ed. New York: W.H. Freeman, 2012, ISBN: 978-1-4292-2404-8.

[2] Γ. Χαλικιάς, *Σημειώσεις Ανάλυσης II*, 2023.

[3] Γ. Χαλικιάς, "Διανυσματικός Λογισμός," (Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ), Οκτ. 2024. διεύθν.: https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/D260/2024-2025/Lectures-vector-calculus.pdf.